Színezés

Bevezetés a számításelméletbe 2

5. gyakorlat

2022.

Kromatikus szám.

A G egyszerű gráf csúcsainak egy színezésén színeknek a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak.

A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G) = k$, ha G k színnel kiszínezhető, de $k-1$ színnel nem.

Klikk.

A G gráf egy teljes részgráfját klikknek nevezzük. A G-ben található maximális méretű klikk méretét $\omega(G)$-vel jelöljük és a gráf klikkszámának nevezzük.

Állítás.

Minden G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ teljesül.

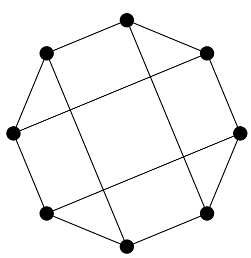
Páros gráf.

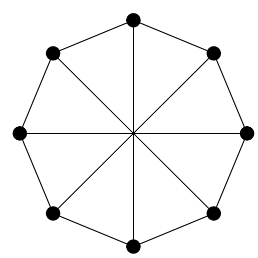
Egy G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha $\chi(G) \leq 2$, azaz ha a csúcshalmaza felbontható két diszjunkt halmazra úgy, hogy a G minden éle kizárólag eközött a két halmaz között futhat.

Állítás.

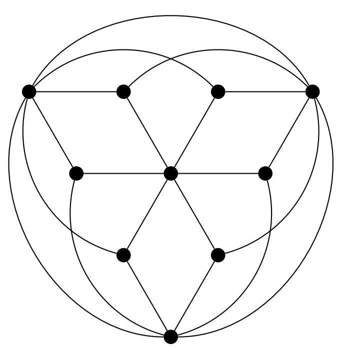
Egy gráf pontosan akkor páros, ha nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

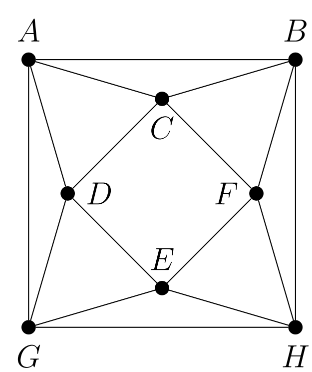
1. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok párosak-e!



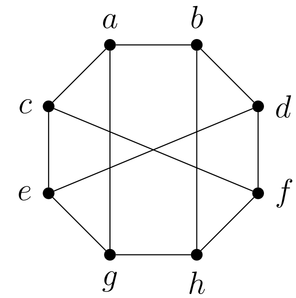


2. Határozzuk meg az alábbi gráfok kromatikus számát.





3. Állapítsuk meg, hány szín kell az alábbi ábrán látható G gráf a, b, c, d, e, f, g, h sorrendben történő mohó színezéséhez. Milyen színt kap ekkor a h csúcs?



4. Egy egyszerű gráfban pontosan egy páratlan kör van. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

5. Legyen a G gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 9999\}$ és tegyük fel, hogy G minden csúcsa a nála kisebb számok közül legfeljebb tízzel szomszédos. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 11$.

6. Egy 10-csúcsú egyszerű gráfban van egy 5, egy 4 és egy 3 fokú csúcs, minden más csúcs foka 2. Mutassuk meg, hogy a gráf színezhető 3 színnel.

7. Legyen a G teljes gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Hagyjuk most el G-ből az $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$ és a $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$ éleket. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

8. Egy szabályos tízenegyszögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (11-csúcsú, 22-élű) gráf kromatikus számát.

9. Határozzuk meg a 100-csúcsú, illetve a 101-csúcsú kör komplementerének a kromatikus számát.

10. A $K_{3,3}$ teljes páros gráfba behúzunk két nem csatlakozó élet úgy, hogy a kapott G gráf egyszerű legyen. Határozzuk meg G kromatikus számát.

11. Készítsük el a G gráfot egy 7 hosszú körből úgy, hogy hozzáadunk a körhöz $\binom{7}{3}$ új csúcsot, és az új csúcsok mindegyikét a kör három pontjával kötjük össze úgy, hogy semelyik két új csúcsnak se ugyanazok a körbeli csúcsok legyenek a szomszédai. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.

12. Legyen G olyan 7 csúcsú egyszerű gráf, melyre G-ben és a komplementerében is van Hamilton-kör. Mutassuk meg, hogy ekkor G kromatikus száma 3 vagy 4.

13. Egy sakktáblán 7 huszár áll úgy, hogy mindegyik legalább két másikat tud ütni. Mutassuk meg, hogy biztosan van közöttük olyan, amelyik három másikat is tud ütni.

14. Tegyük fel, hogy a G gráf 4-színezhető és véges. Igazoljuk, hogy kiválasztható G éleinek legfeljebb hatodrésze úgy, hogy a kiválasztott élek G-ből való törlésével kapott G' gráf 3-színezhető legyen.

15. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges e élű egyszerű gráf élei közül elhagyható legfeljebb $e/2$ úgy, hogy a maradék gráf páros legyen.

16. Bizonyítsuk be, hogy minden e élű G egyszerű gráfra $e \geq \binom{\chi(G)}{2}$ teljesül.

17. Adjunk meg olyan gráfot, melyből tíz alkalmas élet törölve a kromatikus szám tízzel csökken és határozzuk meg az ilyen gráfok csúcsszámának minimumát.

18. Adjunk példát olyan gráfra, melynek kromatikus száma 8, de egy alkalmas Hamilton-körének éleit törölve a kromatikus szám 4-re csökken.