Intervallumgráfok, görög betűk

Bevezetés a számításelméletbe 2

6. gyakorlat

2022.

Intervallumgráf.

Egy G egyszerű gráfot intervallumgráfnak nevezünk, ha csúcsainak megfeleltethetők (korlátos és zárt) intervallumok a számegyenesen úgy, hogy két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő intervallumoknak van közös pontja.

Intervallumgráfok optimális színezése.

Legyen G egy intervallumgráf és tegyük fel, hogy G reprezentálható az $\{I_1, \ldots, I_n\}$ intervallumrendszerrel. Ekkor G csúcsait a megfelelő intervallumok balvégpontja szerinti növekvő sorrendben mohón színezve egy optimális színezést kapunk.

Tétel.

Minden G intervallumgráfra $\chi(G) = \omega(G)$ teljesül.

Párosítás (független élhalmaz).

Egy G gráf $M \subseteq E(G)$ élhalmazát párosításnak vagy független élhalmaznak nevezzük, ha semelyik két M-beli élnek nincs közös végpontja.

Lefogó ponthalmaz.

Egy G gráf $X \subseteq V(G)$ ponthalmazát lefogó ponthalmaznak nevezzük, ha G minden élének legalább az egyik végpontja X-beli.

Független ponthalmaz.

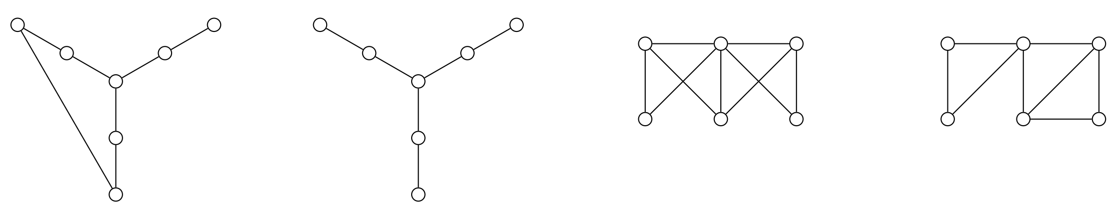
Egy G gráf $Y \subseteq V(G)$ ponthalmazát független ponthalmaznak nevezzük, ha semelyik két Y-beli pont között nem vezet él és semelyik Y-beli csúcsra nem illeszkedik hurokél G-ben.

Lefogó élhalmaz.

Egy izolált pontot nem tartalmazó G gráf egy $Z \subseteq E(G)$ élhalmazát lefogó élhalmaznak nevezzük, ha G minden csúcsára illeszkedik legalább egy Z-beli él.

1. Tekintsük azokat a zárt intervallumokat a számegyenesen, amelyeknek mindkét végpontja 0 és 7 közötti egész, a hosszuk pedig 2 vagy 3. Adjuk meg az ezek által meghatározott intervallumgráf egy optimális színezését.

2. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok intervallumgráfok-e.



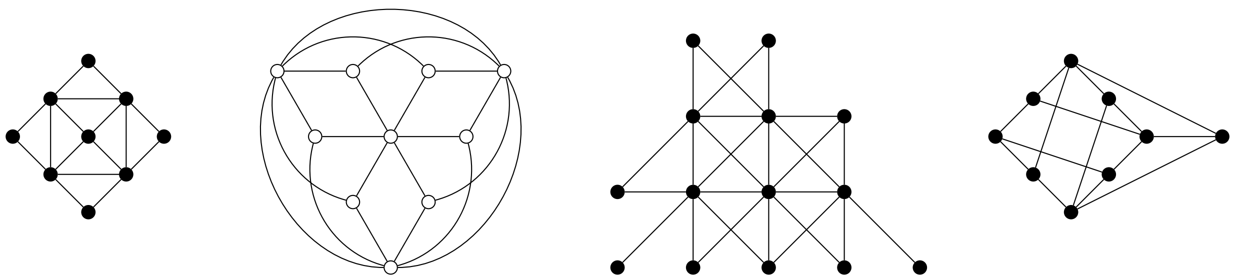
3. Létezik-e 5 csúcsú, 8 élű intervallumgráf?

4. Tekintsük azokat a zárt intervallumokat a számegyenesen, amelyeknek mindkét végpontja 1 és 100 közötti egész szám, a hosszuk legalább 1 és legfeljebb 4, valamint legalább az egyik végpontjuk páros szám. Határozzuk meg az ezek által meghatározott intervallumgráf kromatikus számát!

5. Egy adott intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha az intervallumrendszerből törlünk néhány olyan intervallumot, melyek közt semelyik háromnak nincs közös pontja, akkor a visszamaradó intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma legalább 8.

6. Határozzuk meg az összes olyan fát, amely egyben intervallumgráf is.

7. Adjunk meg egy maximális független élhalmazt és csúcshalmazt, valamint egy minimális lefogó csúcshalmazt és élhalmazt az alábbi gráfokban.



8. Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nemnagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő egészek legnagyobb közös osztója pontosan 2. Határozzuk meg $\nu(G)$-t és $\tau(G)$-t.

9. A $2k$ csúcsú G egyszerű gráfban a nemszomszédos u és v csúcsok foka $k-1$, az összes többi csúcs foka legalább k (ahol $k > 1$ egész). Mutassuk meg, hogy G-ben van teljes párosítás.

10. Egy 50 csúcsú egyszerű gráfban a maximális fokszám 7. Mutassuk meg, hogy van a gráfban 7 csúcsú független ponthalmaz.

11. Egy 100 csúcsú G páros gráfnak van teljes párosítása. Határozzuk meg a lefogó pontok minimális számát abban a H gráfban, melyet G-ből egy tetszőleges további él behúzásával kapunk.

12. Bizonyítsuk be, hogy a $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ egyenlőtlenség minden egyszerű G gráfra teljesül.

13. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráf valamely párosítása tovább már nem bővíthető (azaz nincs olyan él a gráfban, melyet hozzávéve párosítás marad), akkor legalább feleannyi élet tartalmaz, mint G egy maximális párosítása.

14. Bizonyítsuk be, hogy a $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$ egyenlőtlenség minden n csúcsú, hurokélmentes G gráfra teljesül.

15. Mennyi az $\alpha(G) + \nu(G)$ lehetséges legnagyobb értéke, ha G tetszőleges 100 csúcsú gráf lehet?

16. Legyen G és H két gráf ugyanazon a V csúcshalmazon, J pedig az a gráf, melynek csúcshalmaza szintén V, élhalmaza pedig G és H élhalmazainak uniója. Mutassuk meg, hogy
$$\chi(J) \leq \chi(G) + \tau(H).$$

17. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$.

18. Legyenek a G gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok és az $i, j \in 1, \ldots, 100$, $i \neq j$ csúcsok között akkor vezet él, ha $i \mid j$ vagy $j \mid i$. Határozzuk meg $\tau(G)$-t.