

Élszínezés, folyamatok

BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 2

8. gyakorlat

2022.

Élkromatikus szám.

A G gráf élkromatikus száma $\chi_e(G) = k$, ha G élei k színnel színezhetőek, de $k - 1$ színnel nem.

Állítás.

Tetszőleges G gráfra $\Delta(G) \leq \chi_e(G)$ teljesül.

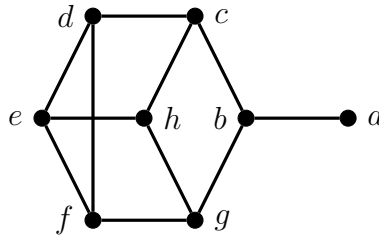
Vizing-tétel.

Ha G egy egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kőnig-tétel.

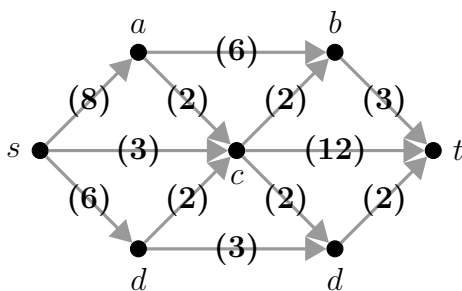
Ha G egy páros gráf, akkor $\chi_e(G) = \Delta(G)$.

1. Határozzuk meg az alábbi gráf élkromatikus számát.



2. Határozzuk meg egy 6-csúcsú kör komplementerének élkromatikus számát!
3. Határozzuk meg a tripla ötszög (vagyis azon gráf, melyet úgy kapunk, hogy egy öt hosszú kör minden élét három párhuzamos éllel helyettesítjük) élkromatikus számát.
4. Egy 20-csúcsú fában 11 csúcs foka 1 és a maradék 9 csúcs foka is azonos (de persze nem 1). Határozzuk meg a fa élkromatikus számát.
5. Legyen G olyan 3-reguláris egyszerű gráf, melyben van elvágó él (azaz olyan él, melyet elhagyva a gráf szétesik). Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi_e(G) = 4$.
6. A G egyszerű gráf v csúcsának foka 2, minden más pont foka 3. Határozzuk meg $\chi_e(G)$ -t.
7. Legyen G 99 csúcsú egyszerű gráf, melyben minden csúcs fokszáma ugyanannyi. Bizonyítsuk be, hogy G élkromatikus száma páratlan.
8. Egy 99 csúcsú gráfnak van két olyan Hamilton-köre, melyeknek nincsen közös éle. Mutassuk meg, hogy a gráf élkromatikus száma legalább 5.
9. Mutassuk meg, hogy ha G 9 csúcsú egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G}) \geq 9$.

10. (a) Mutassuk meg, hogy ha G 3-reguláris gráf, melynek van Hamilton-köre, akkor $\chi_e(G) = 3$.
 (b) Bizonyítsuk be, hogy a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör.
11. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges e élű G gráf esetén az alábbiak teljesülnek.
- (a) $\chi_e(G) + \nu(G) \leq e + 1$
 (b) $\chi_e(G) \cdot \nu(G) \geq e$
12. Legyen G egy 20-csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka 8. Legyen v a G egy tetszőleges csúcsa és jelölje $G - v$ azt a gráfot, amelyet G -ből a v (és az összes v -re illeszkedő él) törlésével kapunk. Bizonyítsuk be, hogy $\chi_e(G - v) = \chi_e(G)$.
13. Létezik-e olyan egyszerű gráf, melynek élkromatikus száma 5, de egy alkalmas Hamilton-körének éleit törölve az élkromatikus szám 2-re csökken?
14. Mutassuk meg, hogy a 20- és 19-résztvevős körmérkőzéses bajnokságok is lebonyolíthatók 19 fordulóban. (Minden csapat mindenki mással egyszer játszik, egy fordulóban egy csapat legfeljebb egyszer léphet pályára.)
15. Adjunk meg egy maximális folyamot az alábbi hálózatban.



16. Növeljük a megadott folyamot, ha ez lehetséges!

