Intervallumgráfok, szélességi bejárás

Bevezetés a számításelméletbe 2

5. gyakorlat

2023.

Intervallumgráf.

Egy G egyszerű gráfot intervallumgráfnak nevezünk, ha csúcsainak megfeleltethetők (korlátos és zárt) intervallumok a számegyenesen úgy, hogy két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő intervallumoknak van közös pontja.

Intervallumgráfok optimális színezése.

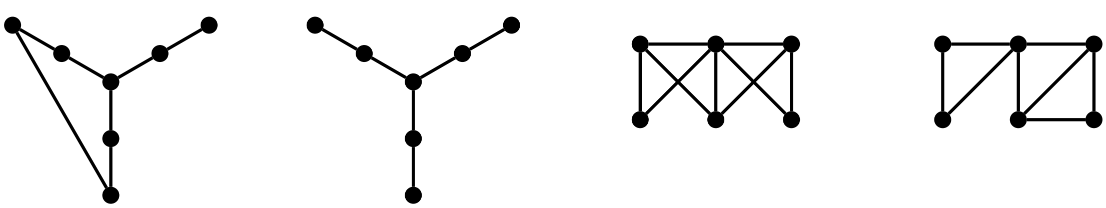
Legyen G egy intervallumgráf és tegyük fel, hogy G reprezentálható az $\{I_1, \ldots, I_n\}$ intervallumrendszerrel. Ekkor G csúcsait a megfelelő intervallumok balvégpontja szerinti növekvő sorrendben mohón színezve egy optimális színezést kapunk.

Tétel.

Minden G intervallumgráfra $\chi(G) = \omega(G)$ teljesül.

1. Tekintsük azokat a zárt intervallumokat a számegyenesen, amelyeknek mindkét végpontja 0 és 7 közötti egész, a hosszuk pedig 2 vagy 3. Adjuk meg az ezek által meghatározott intervallumgráf egy optimális színezését.

2. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok intervallumgráfok-e.



3. Létezik-e 5-csúcsú, 8-élű intervallumgráf?

4. Tekintsük azokat a zárt intervallumokat a számegyenesen, amelyeknek mindkét végpontja 1 és 100 közötti egész szám, a hosszuk legalább 1 és legfeljebb 4, valamint legalább az egyik végpontjuk páros szám. Határozzuk meg az ezek által meghatározott intervallumgráf kromatikus számát.

5. Egy adott intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha az intervallumrendszerből törlünk néhány olyan intervallumot, melyek közt semelyik háromnak nincs közös pontja, akkor a visszamaradó intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma legalább 8.

6. Határozzuk meg az összes olyan fát, amely egyben intervallumgráf is.

7. Létezik olyan G gráf, amire $\omega(G) = 100$ és $\chi(G) = 1000$ teljesül?

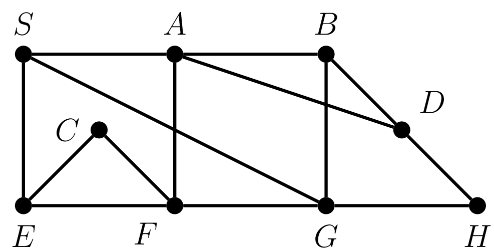
8. Jelölje G_5 azt a Zykov konstrukciója által előállított (384160560-csúcsú) gráfot, amire $\omega(G_5) = 2$ és $\chi(G_5) = 5$. Van-e G_5-ben Hamilton-kör? (A konstrukciót az ötcsúcsú körből, mint G_3 gráfból indítottuk.)

9. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával. Keressünk G-ben a-ból kiinduló szélességi feszítőfát. Mennyi lesz a csúcsok a-tól való távolsága?

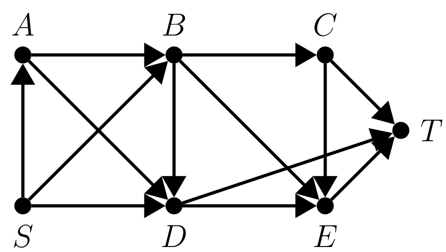
$\boldsymbol{a}$: b, c;	$\boldsymbol{b}$: a, d;	$\boldsymbol{c}$: a, d;	$\boldsymbol{d}$: b, c, e, f;
$\boldsymbol{e}$: d, f, g;	$\boldsymbol{f}$: d, e, g, h;	$\boldsymbol{g}$: e, f, h;	$\boldsymbol{h}$: f, g.

10. (a) A BFS algoritmus az alábbi gráf csúcsait a következő sorrendben járta be: S, $\square$, $\square$, $\square$, H, $\square$, F, C, $\square$. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS fát.

    (b) Tartalmazhatja-e a $\{D, H\}$ élet a gráf egy S-ből indított tetszőleges BFS bejárásához tartozó BFS-fája?



11. A BFS algoritmus az alábbi irányított gráf csúcsait a következő sorrendben járta be: S, $\square$, $\square$, A, T, $\square$, $\square$. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS fát.



12. Legyen G egyszerű, irányítatlan gráf, a és b pedig G két különböző csúcsa. Igaz-e, hogy ha G-nek egy, az a-ból indított szélességi bejárása a b csúcsot ötödiknek találja meg, akkor biztosan létezik G-nek olyan, b-ből indított szélességi bejárása, mely az a csúcsot ötödiknek találja meg?

13. A G összefüggő gráfban minden pont foka 3. Az s csúcsából indított BFS algoritmus a v csúcsot 13.-ként éri el (az elsőnek elért csúcs s). Előfordulhat-e, hogy v távolsága s-től

    (a) 2; (b) 3; (c) 8?

14. (a) Tervezzünk olyan algoritmust, amely egy adott G gráf és $e \in E(G)$ él esetén eldönti, hogy G-ben van-e e-t tartalmazó kör és ha igen, akkor megtalálja az ilyen körök közül a legrövidebbek egyikét.

    (b) Mi a helyzet akkor, ha adott él helyett egy adott $v \in V(G)$ csúcsot tartalmazó legrövidebb kört kell találnunk?

15. Egy összefüggő G gráf egy F feszítőfáját nevezzük a gráf v csúcsára illeszkedőnek, ha G-nek van olyan, a v csúcsból indított BFS bejárása, amihez tartozó BFS fa éppen F. Legfeljebb hány éle lehet egy 100-csúcsú G összefüggő gráfnak, ha van olyan feszítőfája, ami G minden csúcsára illeszkedik?