Párosítások, görög betűk

Bevezetés a számításelméletbe 2

6. gyakorlat

2023.

Párosítás (független élhalmaz).

Egy G gráf $M \subseteq E(G)$ élhalmazát párosításnak vagy független élhalmaznak nevezzük, ha semelyik két M-beli élnek nincs közös végpontja.

Lefogó ponthalmaz.

Egy G gráf $X \subseteq V(G)$ ponthalmazát lefogó ponthalmaznak nevezzük, ha G minden élének legalább az egyik végpontja X-beli.

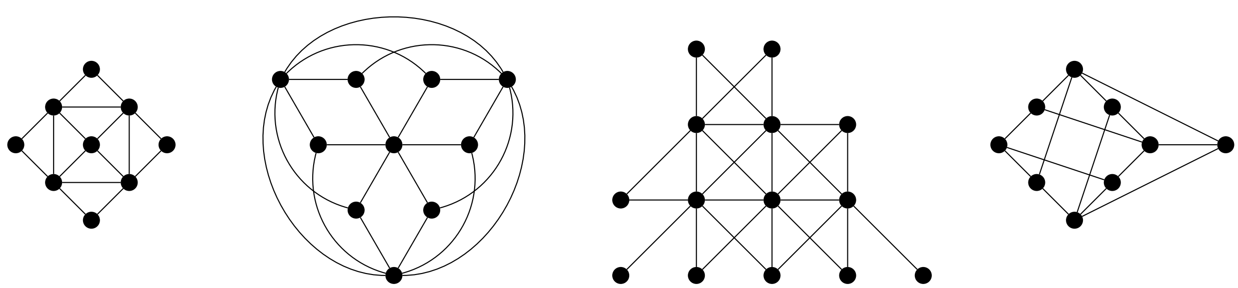
Független ponthalmaz.

Egy G gráf $Y \subseteq V(G)$ ponthalmazát független ponthalmaznak nevezzük, ha semelyik két Y-beli pont között nem vezet él és semelyik Y-beli csúcsra nem illeszkedik hurokél G-ben.

Lefogó élhalmaz.

Egy izolált pontot nem tartalmazó G gráf egy $Z \subseteq E(G)$ élhalmazát lefogó élhalmaznak nevezzük, ha G minden csúcsára illeszkedik legalább egy Z-beli él.

1. Adjunk meg egy maximális független élhalmazt és csúcshalmazt, valamint egy minimális lefogó csúcshalmazt és élhalmazt az alábbi gráfokban.



2. Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nemnagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő egészek legnagyobb közös osztója pontosan 2. Határozzuk meg $\nu(G)$-t és $\tau(G)$-t.

3. A $2k$-csúcsú G egyszerű gráfban a nemszomszédos u és v csúcsok foka $k-1$, az összes többi csúcs foka legalább k (ahol $k > 1$ egész). Mutassuk meg, hogy G-ben van teljes párosítás.

4. A 20-csúcsú G gráf élei közül bárhogyan is választunk ki 8-at, G-nek mindig van olyan csúcsa, amire legalább kettő illeszkedik a kiválasztott élek közül. Mutassuk meg, hogy ekkor bárhogyan választunk ki G élei közül 12-t, G-nek mindig lesz olyan csúcsa, amire egy sem illeszkedik a kiválasztott élek közül.

5. Egy 100-csúcsú G páros gráfnak van teljes párosítása. Határozzuk meg a lefogó pontok minimális számát abban a H gráfban, melyet G-ből egy tetszőleges további él behúzásával kapunk.

6. Egy 10-csúcsú egyszerű gráfban a maximális fokszám 6, a független élek maximális száma 5. Mutassuk meg, hogy a gráfban van páratlan kör.
7. Bizonyítsuk be, hogy a $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ egyenlőtlenség minden egyszerű G gráfra teljesül.
8. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráf valamely párosítása tovább már nem bővíthető (azaz nincs olyan él a gráfban, melyet hozzávéve párosítás marad), akkor legalább feleannyi élet tartalmaz, mint G egy maximális párosítása.
9. Bizonyítsuk be, hogy a $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$ egyenlőtlenség minden n-csúcsú, hurokélmentes G gráfra teljesül.
10. Mennyi az $\alpha(G) + \nu(G)$ lehetséges legnagyobb értéke, ha G tetszőleges 100-csúcsú gráf lehet?
11. Egy 50-csúcsú egyszerű gráfban a maximális fokszám 7. Mutassuk meg, hogy van a gráfban 7-csúcsú független ponthalmaz.
12. Legyen G és H két gráf ugyanazon a V csúcshalmazon, J pedig az a gráf, melynek csúcshalmaza szintén V, élhalmaza pedig G és H élhalmazainak uniója. Mutassuk meg, hogy
$$\chi(J) \leq \chi(G) + \tau(H).$$
13. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$.
14. Legyenek a G gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok és az $i, j \in 1, \ldots, 100$, $i \neq j$ csúcsok között akkor vezet él, ha $i \mid j$ vagy $j \mid i$. Határozzuk meg $\tau(G)$-t.