

Maximális párosítás keresése páros gráfokban

BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 2

7. gyakorlat

2023.

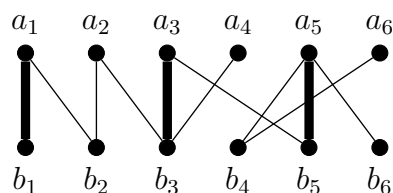
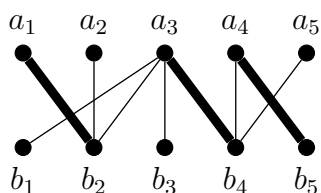
Frobenius-tétel.

Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

Hall-tétel.

Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van A -t lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

1. Az ábrán látható gráfokban keressünk egy-egy maximális párosítást a javító utas algoritmussal a vastag vonalakkal jelölt párosításokból kiindulva, valamint adjunk meg egy-egy minimális lefogó pontthalmazt is.



2. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j -vel, ha az alábbi mátrix i -edik sorának és j -edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G -ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Egy 100-csúcsú G páros gráfnak van teljes párosítása. Határozzuk meg a lefogó pontok minimális számát abban a H gráfban, melyet G -ből egy tetszőleges további él behúzásával kapunk.
4. Tegyük fel, hogy a 88-pontú G páros gráfban $\alpha(G) = 44$. Igazoljuk, hogy G -re teljesül a Hall-feltétel, azaz $|X| \leq |N(X)|$ az A színosztály minden X részhalmaza esetén.

5. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf A színosztálya 28, a B színosztálya 33-pontú, valamint a B színosztálynak valamely Y részhalmazára $|Y| = 18$ és $|N(Y)| = 12$. Mutassuk meg, hogy az A színosztályra nem teljesül a Hall-feltétel.
6. Egy egyszerű páros gráf mindkét osztályában pontosan 5 csúcs van, és minden csúcs foka legalább 2. Igaz-e, hogy a gráfban biztosan van teljes párosítás?
7. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható.
8. Egy kiránduláson a résztvevő n házaspár között akarunk szétosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a csokoládék közül, és hogy minden csokoládét minden házaspárnak legalább az egyik tagja szereti. Bizonyítsuk be, hogy a csokoládék kioszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amelyet szeret.
9. G egy páros gráf, A és B osztályokkal, és minden $X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X| - 1$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz olyan párosítást, ami A -t egy pont kivételével lefedí.
10. G egy páros gráf, A és B színosztályokkal. A -ban minden pont foka 40, B -ben 30.
 - (a) Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz A -t fedő párosítást.
 - (b) Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 10 éldiszjunkt A -t fedő párosítást.
11. Egy 10-csúcsú páros gráfban minden csúcs foka 3 vagy 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás.
12. A villamosmérnök-hallgatók számára beüzemelték néhány számítógépet. Minden hallgatónak legalább 10 gépre van belépési jogosultsága, minden gépen pedig legfeljebb 7 hallgatónak van felhasználói fiókja. Igaz-e, hogy ekkor bizonyosan leültethetünk minden villamosmérnök-hallgatót egy-egy különböző számítógéphez úgy, hogy mindenki olyan géphez üljön, amire be tud lépni?
13. Valaki találomra szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy 2-es, egy 3-as, ..., egy ász).
14. Egy szigeten n család lakik. A sziget elöljárói felosztották az egész szigetet n egyenlő területű vadászati körzetre és ezzel egyidejűleg (az előbbtől függetlenül, ezért egészen más módon) felosztották az egész szigetet n egyenlő területű mezőgazdasági területre. Most azt szeretnék elérni, hogy minden családhoz tartozzon egy vadászati és egy mezőgazdasági terület úgy, hogy a két területnek legyen közös része. Megoldható-e ez mindig?
15. A faluban $2n$ lány és $2n$ fiú él. A lányoknak – akik párosával testvérek, és nem rokonaik a fiúknak – az a céljuk, hogy úgy házasodjanak össze a falubeli fiúkkal, hogy minden lány le tudja nyomni a férjét szkanderban. Tudjuk, hogy az i -edik lánytestvérpár bármelyik tagja képes legalább $2i - 1$ fiút szkanderban legyőzni, ráadásul minden lány le tud győzni olyan fiút is, akit a testvére nem. Mutassuk meg, hogy lehetséges a kívánt házasság.
16. Egy 100×100 -as sakktáblán kijelölünk 30 mezőt úgy, hogy összefüggő területet alkossanak, vagyis bármely kijelölt mezőből el lehessen jutni bármelyik másikba úgy, hogy oldalszomszédos kijelölt mezőkre léphetünk át (akárhányszor). Mutassuk meg, hogy ekkor a kijelölt mezőkön mindig el lehet helyezni 8 darab 1×2 -es dominót átfedés nélkül úgy, hogy minden dominó a sakktábla két szomszédos mezőjét fedje le.