Élszínezés, minimális költségű feszítőfák

Bevezetés a számításelméletbe 2

8. gyakorlat

2023.

Élkromatikus szám.

A G gráf élkromatikus száma $\chi_e(G) = k$, ha G élei k színnel színezhetőek, de $k-1$ színnel nem.

Állítás.

Tetszőleges G gráfra $\Delta(G) \leq \chi_e(G)$ teljesül.

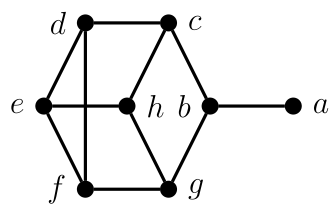
Vizing-tétel.

Ha G egy egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kőnig-tétel.

Ha G egy páros gráf, akkor $\chi_e(G) = \Delta(G)$.

1. Határozzuk meg az alábbi gráf élkromatikus számát.



2. Határozzuk meg egy 6-csúcsú kör komplementerének élkromatikus számát.

3. Határozzuk meg a tripla ötszög (vagyis azon gráf, melyet úgy kapunk, hogy egy öthosszú kör minden élét három párhuzamos éllel helyettesítjük) élkromatikus számát.

4. Egy 20-csúcsú fában 11 csúcs foka 1 és a maradék 9 csúcs foka is azonos (de persze nem 1). Határozzuk meg a fa élkromatikus számát.

5. Legyen G olyan 3-reguláris egyszerű gráf, melyben van elvágó él (azaz olyan él, melyet elhagyva a gráf szétesik). Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi_e(G) = 4$.

6. A G egyszerű gráf v csúcsának foka 2, minden más pont foka 3. Határozzuk meg $\chi_e(G)$-t.

7. Legyen G 99-csúcsú egyszerű gráf, melyben minden csúcs fokszáma ugyanannyi. Bizonyítsuk be, hogy G élkromatikus száma páratlan.

8. Egy 99-csúcsú gráfnak van két olyan Hamilton-köre, melyeknek nincsen közös éle. Mutassuk meg, hogy a gráf élkromatikus száma legalább 5.

9. Mutassuk meg, hogy ha G 9-csúcsú egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G}) \geq 9$.

10. (a) Mutassuk meg, hogy ha G 3-reguláris gráf, melynek van Hamilton-köre, akkor $\chi_e(G) = 3$.

    (b) Bizonyítsuk be, hogy a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör.

11. Bionyítsuk be, hogy tetszőleges e-élű G gráf esetén az alábbiak teljesülnek.

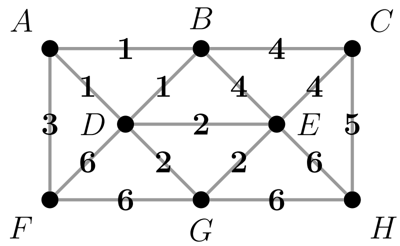
    (a) $\chi_e(G) + \nu(G) \leq e + 1$

    (b) $\chi_e(G) \cdot \nu(G) \geq e$

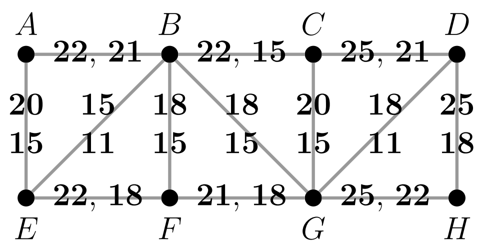
12. Legyen G egy 20-csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka 8. Legyen v a G egy tetszőleges csúcsa és jelölje $G - v$ azt a gráfot, amelyet G-ből a v (és az összes v-re illeszkedő él) törlésével kapunk. Bizonyítsuk be, hogy $\chi_e(G - v) = \chi_e(G)$.

13. Mutassuk meg, hogy a 20- és 19-résztvevős körmérkőzéses bajnokságok is lebonyolíthatók 19 fordulóban. (Minden csapat mindenki mással egyszer játszik, egy fordulóban egy csapat legfeljebb egyszer léphet pályára.)

14. (a) Határozzuk meg az alábbi gráf egy minimális összsúlyú feszítőfáját.
    (b) Hány különböző kimenete lehet a Kruskal-algoritmusnak?

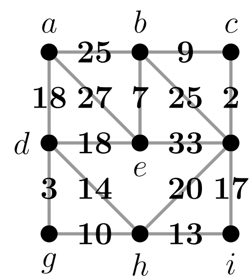


15. Az alábbi ábrán látható G gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élen két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amelyen G minden pontja elérhető. Határozzunk meg egy lehető legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt.



16. A tízcsúcsú G teljes gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Minden $1 \leq i < j \leq 10$ esetén az $\{i, j\}$ él súlya $\left\lfloor \frac{2j-i}{3} \right\rfloor$. Adjunk meg G-ben egy minimális összsúlyú feszítőfát.

17. Az alábbi ábrán látható a G irányítatlan gráf és az élek költségei. Határozzuk meg, hogy ha az e és a h csúcsok közé behúzunk egy új élet, akkor ezen élnek milyen (nemnegatív) költséget adhatunk ahhoz, hogy biztosan benne legyen a kapott gráfnak legalább egy minimális összsúlyú feszítőfájában.



18. Adott egy $G = (V, E)$ gráf és egy $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, valamint G éleinek egy piros, fehér és zöld színnel színezése. Adjunk hatékony eljárást a G olyan minimális költségű feszítőerdejének megtalálására, amely a lehető legtöbb zöld, és a lehető legkevesebb piros élt tartalmazza.

19. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ összefüggő gráf minden élének különböző a költsége, akkor G minimális költségű feszítőfája egyértelmű.

20. Legyen G egy összefüggő gráf és $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény G élein. Mutassuk meg, hogy G minden minimális összsúlyú feszítőfája megkapható a Kruskal-algoritmus egy lehetséges futásának eredményeként.