Gyakorlás

Bevezetés a számításelméletbe 2

Konzultáció

2023.

1. Az 39-csúcsú F fában a csúcsok fokszámai csak két különböző értéket vesznek fel, minden fokszám vagy d_1 vagy d_2. Izomorfia erejéig határozzuk meg az összes ilyen fát.

2. Legyen G egy 2023-csúcsú, r-reguláris gráf. Bizonyítsuk be, hogy G vagy $\overline{G}$ tartalmaz Euler-körsétát.

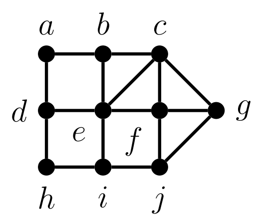
3. Legyenek $H_1, H_2, \ldots, H_{k-1}$ a K_{4k} teljes gráf néhány (nem feltétlenül éldiszjunkt) Hamilton-köre, és jelölje G azt a gráfot, amit K_{4k}-ból úgy kapunk, hogy töröljük belőle ezen Hamilton-körök éleit. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van Hamilton-köre.

4. Az n-csúcsú ($n \geq 3$) G gráf a következő tulajdonsággal rendelkezik: $\overline{G}$-ben bármely két szomszédos csúcs fokszámának az összege legfeljebb $n-2$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz Hamilton-utat.

5. Legyenek $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$, $G_3 = (V, E_3)$ tetszőleges páros gráfok és tekintsük a $G = (V, E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ gráfot. Bizonyítsuk be, hogy a G gráf 8 színnel színezhető.

6. Legyen G egy olyan intervallumgráf, amely tartalmaz 2013-csúcsú kört. Igaz-e feltétlenül, hogy G tartalmaz 3-csúcsú kört?

7. Legfeljebb hány keresztél keletkezik az alábbi G gráf e gyökérből indított BFS bejárása után?



8. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{36}$. A v_i és v_j csúcsok pontosan akkor vannak összekötve egy éllel, ha $i \cdot j$ osztható 6-tal. Határozzuk meg $\alpha(G)$ és $\rho(G)$ értékét.

9. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_7\}$. Minden $1 \leq i \leq 6$ és $1 \leq j \leq 7$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha az alábbi mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy-egy maximális független, valamint minimális lefogó pont- és élhalmazt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Tegyük fel, hogy $\nu(G) = 2$ és $\tau(G) = 4$. Bizonyítsuk be, hogy $3 \leq \chi(G) \leq 5$.

11. A $G = (A, B; E)$ páros gráf mindkét pontosztálya 10-csúcsú (vagyis $|A| = |B| = 10$). A gráf minden e éléhez tartozik egy adott $w(e) \geq 0$ nemnegatív súly. Tudjuk, hogy a gráf minden v csúcsára teljesül, hogy a v-re illeszkedő élek összsúlya legalább 8 és legfeljebb 9 (és így v-re illeszkedik legalább egy él). Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás.

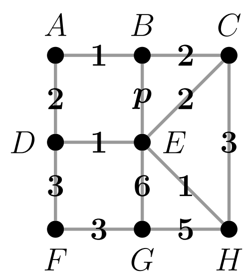
12. A G gráfnak 2021 csúcsa van és $\Delta(G) = 100$. Bizonyítsuk be, hogy $\tau(G) \leq 2000$.

13. Egy zenés-táncos mulatságon fiú-lány párok táncolnak és az utolsó szám előtt az teljesül, hogy minden fiú legalább 60 percet, minden lány pedig legfeljebb egy órát táncolt összesen. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas partnerválasztással elérhető, hogy az utolsó szám alatt minden fiú olyan lánnyal táncoljon, akivel már korábban is táncolt a mulatságon.

14. Tegyük fel, hogy a G páros gráfban az A és B színosztályok mérete azonos, továbbá, hogy A tetszőleges valódi és nemüres X részhalmazára igaz az $|N(X)| \geq |X| + 1$ feltétel. Mutassuk meg, hogy G bármely e éléhez létezik G-nek e-t tartalmazó teljes párosítása.

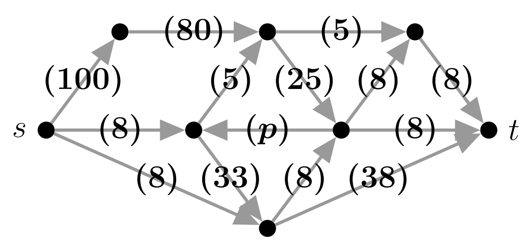
15. Határozzuk meg a $\chi_e(G) + \chi_e(G)$ összeg minimális értékét a 2009-csúcsú egyszerű gráfokon.

16. A p pozitív valós paraméter minden értékére határozzunk meg egy minimális összsúlyú feszítőfát az alábbi gráfban.



17. A K_n n-csúcsú ($n \geq 3$) teljes gráf élein pozitív súlyok vannak úgy, hogy minden Hamilton-út egy minimális összsúlyú feszítőfa. Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden feszítőfa minimális összsúlyú feszítőfa.

18. Határozzuk meg a nemnegatív p paraméter összes olyan értékét, melyre a fenti hálózatban a maximális st-folyam nagysága a lehető legnagyobb.



19. Adott egy (G, s, t, c) hálózat. Ha minden él kapacitásához hozzáadunk 1-et, akkor a maximális folyam nagysága 10 lesz. Ha viszont minden él kapacitásából levonunk 1-et, akkor a maximális folyam nagysága 7 lesz. Határozzuk meg a maximális folyam nagyságát (G, s, t, c)-ben.