

Gráfelméleti alapfogalmak

BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 2

1. gyakorlat 2024.

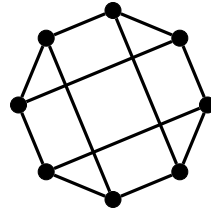
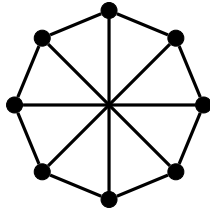
Komplementer gráf.

Egy G egyszerű gráf komplementerén azt a \bar{G} gráfot értjük, melyben két csúcs pontosan akkor szomszédos, ha G -ben nem azok.

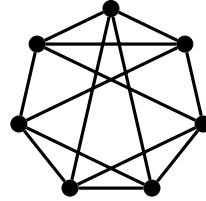
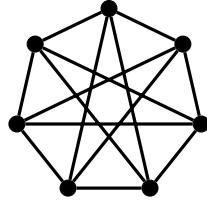
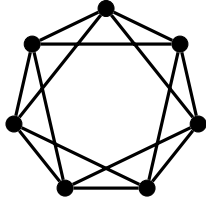
Izomorfia.

A G_1 és G_2 gráfokat izomorfaknak nevezzük, ha a csúcshalmazaik között létezik olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy G_1 -ben bármely két csúcs között pontosan annyi él fut, mint a nekik megfelelő csúcsok között G_2 -ben.

- Döntsük el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre
 - 1, 2, 2, 3, 3, 3,
 - 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4,
 - 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7,
 - 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6.
- Igazoljuk, hogy ha egy 6-csúcsú G gráf fokszámai 2, 2, 2, 4, 5, 5, akkor G nem egyszerű.
- A G irányítatlan gráfnak nyolc csúcsa van, a, b, c, d, e, f, g, h , melyek fokszámai rendre 6, 4, 4, 2, 2, 2, 1, 1. A G éleinek egy alkalmas irányításával létrejövő G' irányított gráfban a fenti csúcsokból rendre $x, 3, 1, 1, 2, 1, 0, 0$ él lép ki. Határozzuk meg x értékét.
- A 6-csúcsú G egyszerű gráfból irányított gráfot készítettünk úgy, hogy G minden élet véletlenszerűen az egyik vagy a másik irányba irányítottuk. Végül azt vettük észre, hogy a kapott irányított gráfban bármely két csúcs kifoka (vagyis a csúcsból kilépő élek száma) különböző. Rajzoljuk le a kapott irányított gráfot.
- Van olyan G gráf, melyben minden csúcs foka különböző? És ha a gráf egyszerű?
- Mi lehet a G gráf, ha $\Delta(G) \leq 2$? ($\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát jelöli.)
- Hány különböző, páronként nemizomorf 50-csúcsú és 1223-élű egyszerű gráf létezik?
- Rajzoljuk le az összes olyan, páronként nemizomorf, egyszerű gráfot, melyre
 - $n = 4, m = 5$;
 - $n = 5, m = 3$;
 - $n = 5, m = 7$;
 - $n = 5, m = 8$;ahol n , illetve m jelöli a gráf csúcsainak, illetve éleinek a számát.
- A G egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$, melyben az 1-es csúcs szomszédos a 8-assal, ezen kívül pedig az $x, y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok pontosan akkor szomszédosak G -ben, ha $|x - y| \leq 2$. Izomorf-e a G gráf a saját komplementerével?
- Egy G gráf pontjai legyenek egy kocka csúcsai és két pont akkor legyen szomszédos, ha a kockában a megfelelő csúcsok él mentén szomszédosak. Az alábbi két gráf közül melyek izomorfak G -vel?



11. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



12. Mutassunk a komplementerével izomorf 5-, illetve 6-pontú gráfot.

13. Egy n -csúcsú, egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább $n/2$. Mutassuk meg, hogy a gráf összefüggő, azaz bármelyik csúcsából el lehet jutni bármelyik másikba az élek mentén lépegetve.

14. Egy 20-csúcsú, egyszerű gráfban nincs izolált csúcs, az egyfokú csúcsok száma pedig pontosan 3. Mutassuk meg, hogy a gráfnak legalább 19 éle van.

15. A 20-csúcsú G egyszerű gráfban 10 csúcs foka legfeljebb 7, a maradék 10 csúcs foka pedig legalább 16. Hány éle van G -nek?

16. A 6-csúcsú G gráf hurokért nem, de többszörös éleket tartalmazhat. Tudjuk, hogy G bármely két csúcsának a foka különböző. Minimálisan hány éle van G -nek?

17. A 100-csúcsú G irányított gráfban minden csúcs kifoka legalább annyi, mint a befoka (ahol egy csúcs kifoka, illetve befoka alatt az abból kilépő, illetve az abba belépő élek számát értjük). A G gráf egyik csúcsának a kifoka 18. Mennyi lehet ugyanennek a csúcsnak a befoka?

18. Kovács úr és a felesége négy házaspárt látott vendégül. Érkezéskor a jelenlévők közül bizonyosak kezet fogtak egymással. Mikor már mindenki megérkezett, Kovács úr mindenkitől megkérdezte, hogy hány emberrel fogott kezet és csupa különböző választ kapott. Hány emberrel fogott kezet Kovács úr felesége? (Természetesen senki sem fogott kezet a saját házastársával.)