Élszínezés

Bevezetés a számításelméletbe 2

10. gyakorlat

2024.

Élkromatikus szám.

A G gráf élkromatikus száma $\chi_e(G) = k$, ha G élei k színnel színezhetőek, de $k-1$ színnel nem.

Állítás.

Tetszőleges G gráfra $\Delta(G) \leq \chi_e(G)$ teljesül.

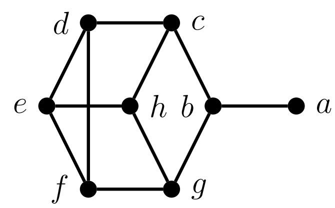
Vizing-tétel.

Ha G egy egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kőnig-tétel.

Ha G egy páros gráf, akkor $\chi_e(G) = \Delta(G)$.

1. Határozzuk meg az alábbi gráf élkromatikus számát.



2. Határozzuk meg egy 6-csúcsú kör komplementerének élkromatikus számát.
3. A G egyszerű gráf csúcsai a 4-hosszúságú bitsorozatok és két csúcs akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő bitsorozatok pontosan egy helyen térnek el egymástól. Határozzuk meg G élkromatikus számát.
4. Határozzuk meg a tripla ötszög (vagyis azon gráf, melyet úgy kapunk, hogy egy öthosszú kör minden élét három párhuzamos éllel helyettesítjük) élkromatikus számát.
5. Bizonyítsuk be hogy minden G egyszerű gráfra $\chi(G) \leq \chi_e(G) + 1$.
6. Egy 20-csúcsú fában 11 csúcs foka 1 és a maradék 9 csúcs foka is azonos (de persze nem 1). Határozzuk meg a fa élkromatikus számát.
7. Tegyük fel, hogy $G = (A, B; E)$ egy 10-csúcsú, egyszerű, páros gráf, és A-ban minden csúcs foka 6. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\chi_e(G) = 6$.
8. Legyen G olyan 3-reguláris egyszerű gráf, melyben van elvágó él (azaz olyan él, melyet elhagyva a gráf szétesik). Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi_e(G) = 4$.
9. A G egyszerű gráf v csúcsának foka 2, minden más pont foka 3. Határozzuk meg $\chi_e(G)$-t.
10. Legyen G 99-csúcsú egyszerű gráf, melyben minden csúcs fokszáma ugyanannyi. Bizonyítsuk be, hogy G élkromatikus száma páratlan.
11. Egy 99-csúcsú gráfnak van két olyan Hamilton-köre, melyeknek nincsen közös éle. Mutassuk meg, hogy a gráf élkromatikus száma legalább 5.

12. (a) Mutassuk meg, hogy ha G egy 3-reguláris gráf, melynek van Hamilton-köre, akkor $\chi_e(G) = 3$.
    (b) Bizonyítsuk be, hogy a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör.
13. Bionyítsuk be, hogy tetszőleges e-élű G gráf esetén az alábbiak teljesülnek.
    (a) $\chi_e(G) + \nu(G) \le e + 1$
    (b) $\chi_e(G) \cdot \nu(G) \ge e$
14. Legyen G egy 20-csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka 8. Legyen v a G egy tetszőleges csúcsa és jelölje $G - v$ azt a gráfot, amelyet G-ből a v (és az összes v-re illeszkedő él) törlésével kapunk. Bizonyítsuk be, hogy $\chi_e(G - v) = \chi_e(G)$.
15. Mutassuk meg, hogy a 20- és 19-résztvevős körmérkőzéses bajnokságok is lebonyolíthatók 19 fordulóban. (Minden csapat mindenki mással egyszer játszik, egy fordulóban egy csapat legfeljebb egyszer léphet pályára.)
16. Kiszínezhető-e
    (a) a $K_{100,100}$ teljes páros gráf minden csúcsa és minden éle 101 szín, illetve
    (b) a $K_{n,n-1}$ teljes páros gráf minden csúcsa és minden éle $n+1$ szín

    valamelyikére úgy, hogy se azonos színű csúcsok között ne vezessen él, se azonos színű éleknek ne legyen közös végpontja, továbbá egyetlen él színe se egyezzen meg egyik végpontjának színével sem?