

Folyamok

BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 2

11. gyakorlat

2024.

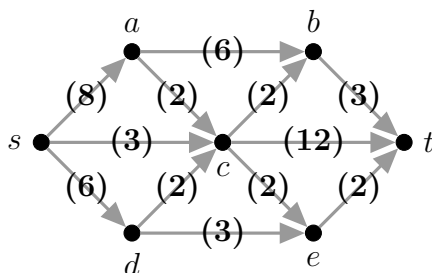
Ford–Fulkerson-tétel.

Tetszőleges (G, s, t, c) hálózatban a maximális st -folyam értéke megegyezik a minimális st -vágás kapacitásával.

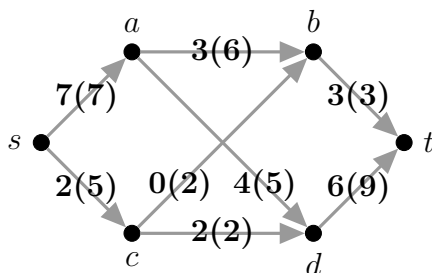
Egészértékűségi (EgÉr) lemma.

Ha egy hálózatban minden él kapacitása egész, akkor létezik olyan maximális folyam, amely minden élen egész értéket vesz fel.

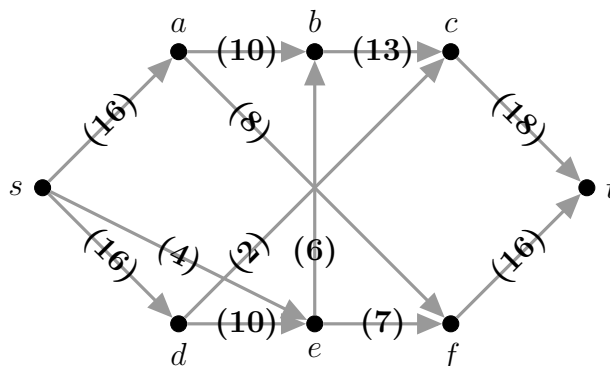
- Adjunk meg egy maximális folyamot az alábbi hálózatban.



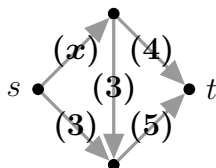
- Növeljük a megadott folyamot, ha ez lehetséges.



- Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot (s -ből t -be).
 - Határozzuk meg az $\{s, a, b\}$ csúcshalmaz által meghatározott vágás kapacitását.
 - Határozzuk meg az $\{s, a, e\}$ csúcshalmaz által meghatározott vágás kapacitását.
 - Adjunk meg egy minimális st -vágást.



4. Határozzuk meg a nemnegatív valós x függvényében a maximális folyam értékét az alábbi hálózatban.



5. Egy hálózatban minden él kapacitása hárommal osztható egész szám. Döntsük el (és indokoljuk is meg), hogy az alábbi állítások közül melyek azok, amelyek mindig teljesülnek.

- (a) Minden vágás kapacitása osztható hárommal.
- (b) Minden folyam értéke osztható hárommal.
- (c) Minden maximális folyam értéke osztható hárommal.
- (d) Minden maximális folyam minden élén a folyamérték osztható hárommal.

6. Egy hálózatban minden él kapacitása 2.

- (a) Igaz-e mindig, hogy a maximális folyamérték páros egész?
- (b) Igaz-e mindig, hogy létezik olyan maximális folyam, mely minden élén 0 vagy 2 értéket vesz fel?
- (c) Igaz-e mindig, hogy minden maximális folyam minden élén 0 vagy 2 értéket vesz fel?

7. A G irányított gráf csúcsai legyenek az $1, 2, \dots, 2k$ egész számok. Tetszőleges $a, b \in \{1, 2, \dots, 2k\}$ esetén az a számból pontosan akkor vezessen egy irányított él b -be, ha $a < b$, és ennek az élnek a kapacitása legyen $b - a$. Mennyi az így kapott hálózatban az 1-ből $2k$ -ba vezető maximális folyam értéke?

8. Legyen adott egy G irányított gráf, $s, t, w \in V(G)$ rögzített csúcsok, valamint egy $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha létezik G -ben m -értékű st -folyam és m -értékű tw -folyam, akkor G -ben létezik m -értékű sw -folyam is.

9. Legyen adott egy G irányított gráf, az $s \in V(G)$ rögzített csúcs és a $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény. Tegyük fel, hogy bármely $t \in V(G), t \neq s$ csúcs esetén az s -ből t -be vezető maximális folyam értéke legalább 100 és a t -ből s -be vezető maximális folyam értéke is legalább 100. Mutassuk meg, hogy ekkor bárhogy választjuk az $u, v \in V(G), u \neq v$ csúcsokat, az u -ből v -be vezető maximális folyam értéke is legalább 100.

10. Legyen adott egy G irányított gráf, az $s \in V(G)$ csúcs és a $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény. Jelölje minden $v \in V(G), v \neq s$ esetén $m(v)$ az s -ből a v -be vezető maximális folyam értékét. Tegyük fel, hogy valamely $t \in V(G)$ csúcsra $m(t) = 100$, de minden $v \in V(G), v \neq s, t$ esetén $m(v) > 100$. Mutassuk meg, hogy ekkor a t -be érkező élek összkapacitása 100.

11. Egy (G, s, t, c) hálózatban minden él kapacitása pozitív egész, és a maximális folyam értéke ebben a hálózatban 2022.

- (a) Képezzük a (G, s, t, c') hálózatot úgy, hogy minden él kapacitásából levonunk 1-et, és legyen m' a maximális folyam értéke ebben a hálózatban.
- (b) Képezzük a (G, s, t, c'') hálózatot úgy, hogy minden él kapacitásához hozzáadunk 1-et, és legyen m'' a maximális folyam értéke ebben a hálózatban.

Határozzuk meg m' és m'' lehetséges értékeit ezen feltételek mellett.

12. Tegyük fel, hogy a (G, s, t, c) hálózatban a maximális st -folyam nagysága 24. Ha az u_1v_1 és az u_2v_2 élek mindegyikének a kapacitását 32-vel megnöveljük, akkor a maximális st -folyam nagysága 88-ra változik. Meghatározható-e mindezek alapján, hogy mennyi lesz a maximális st -folyam nagysága akkor, ha az eredeti hálózatban az u_1v_2 él kapacitását 13-mal csökkentjük, az u_2v_1 él kapacitását pedig 31-gyel növeljük? Ha igen, akkor mennyi ez a maximum? (Az u_1v_2 él kapacitása az eredeti hálózatban legalább 13 volt.)