Gyakorlás

Bevezetés a számításelméletbe 2

12. gyakorlat

2024.

1. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{36}$. A v_i és v_j csúcsok pontosan akkor vannak összekötve egy éllel, ha $i \cdot j$ osztható 6-tal. Határozzuk meg $\alpha(G)$ és $\rho(G)$ értékét.

2. Legyenek G csúcsai $v_{i,j}$, ahol $1 \leq i, j \leq 3$ tetszőleges egész számok. (Tehát G-nek 9 csúcsa van.) Tetszőleges $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ esetén a $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha $|i-k| + |j-l| = 1$. Határozzuk meg az $\alpha(G), \tau(G), \nu(G), \rho(G)$ értékeket.

3. A G gráfnak 2021 csúcsa van és $\Delta(G) = 100$. Bizonyítsuk be, hogy $\tau(G) \leq 2000$.

4. Adott egy 10-csúcsú és 20-élű, egyszerű, páros gráf. Bizonyítsuk be, hogy $\nu(G) \geq 3$.

5. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_7\}$. Minden $1 \leq i \leq 6$ és $1 \leq j \leq 7$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha az alábbi mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy-egy maximális független, valamint minimális lefogó pont- és élhalmazt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Egy zenés-táncos mulatságon fiú-lány párok táncolnak és az utolsó szám előtt az teljesül, hogy minden fiú legalább 60 percet, minden lány pedig legfeljebb egy órát táncolt összesen. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas partnerválasztással elérhető, hogy az utolsó szám alatt minden fiú olyan lánnyal táncoljon, akivel már korábban is táncolt a mulatságon.

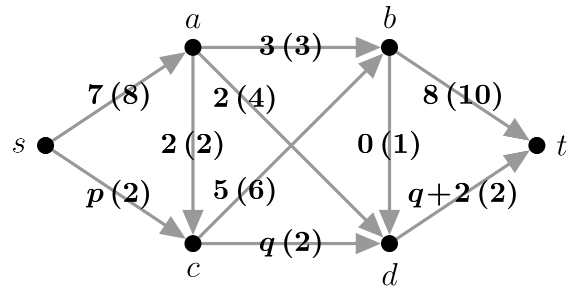
7. Tegyük fel, hogy a G páros gráfban az A és B színosztályok mérete azonos, továbbá, hogy A tetszőleges valódi és nemüres X részhalmazára igaz az $|N(X)| \geq |X| + 1$ feltétel. Mutassuk meg, hogy G bármely e éléhez létezik G-nek e-t tartalmazó teljes párosítása.

8. A G egyszerű gráfban minden csúcs foka 5, kivéve egy csúcsot, amelynek 1. Bizonyítsuk be, hogy $\chi_e(G) = 6$.

9. Határozzuk meg a $\chi_e(G) + \chi_e(G)$ összeg minimális értékét a 2009-csúcsú egyszerű gráfokon.

10. (a) A p és q valós paraméterek milyen értékére alkotnak a jobbra látható hálózatban az éleken szereplő értékek folyamot S-ből T-be? (Az ábrán zárójelben az élek kapacitása, a zárójelen kívül a folyamértékek láthatók.)

    (b) Igaz-e, hogy p-nek és q-nak erre az értékére maximális értékű folyamot kapunk a hálózatban?



11. Legyen a (G, s, t, c_1) hálózatban a maximális folyam értéke m_1, a (G, s, t, c_2) hálózatban m_2, a $\big(G, s, t, \max(c_1, c_2)\big)$ hálózatban pedig m_3. Bizonyítsuk be, hogy $m_3 \leq m_1 + m_2$.

12. Adott egy (G, s, t, c) hálózat, melyben a javítóutas algoritmussal 3 javítás után megkaptuk a maximális folyamot, amelynek az értéke 10. Bizonyítsuk be, hogy van olyan él, amelynek a kapacitása legalább π.

13. Adott egy (G, s, t, c) hálózat. Ha minden él kapacitásához hozzáadunk 1-et, akkor a maximális folyam nagysága 10 lesz. Ha viszont minden él kapacitásából levonunk 1-et, akkor a maximális folyam nagysága 7 lesz. Határozzuk meg a maximális folyam nagyságát (G, s, t, c)-ben.