

Menger tételei, többszörös összefüggőség

BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 2

13. gyakorlat

2024.

Irányított/irányítatlan st -utakat lefogó élhalmaz (ponthalmaz).

Legyen G egy irányított/irányítatlan gráf és $s, t \in V(G)$ két különböző csúcs. Azt mondjuk, hogy egy $Z \subseteq E(G)$ élhalmaz (egy $Y \subseteq V(G)$ ponthalmaz) lefogja az összes s -ből t -be vezető irányított/irányítatlan utat, ha a Z -beli éleket (az Y -beli csúcsokat) elhagyva az s és t csúcsok különböző komponensekbe kerülnek.

Menger tételei.

- Ha G egy irányított/irányítatlan gráf, $s, t \in V(G)$ két tetszőleges csúcs, akkor a páronként élidegen irányított/irányítatlan st -utak maximális száma megegyezik az összes irányított/irányítatlan st -utak lefogó él minimális számával.
- Ha G egy irányított/irányítatlan gráf, $s, t \in V(G)$ két nemszomszédos csúcs, akkor a páronként pontidegen irányított/irányítatlan st -utak maximális száma megegyezik az összes irányított/irányítatlan st -utak lefogó pontok minimális számával.

Többszörös pontösszefüggőség.

Egy G gráfot k -szorosán pontösszefüggőnek nevezünk, ha legalább $k + 1$ pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad.

A legnagyobb olyan k egész számot, amelyre még a G gráf k -szorosán összefüggő, $\kappa(G)$ -vel jelöljük.

Többszörös élösszefüggőség.

Egy G gráfot k -szorosán élösszefüggőnek nevezünk, ha akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb élet, a maradék gráf összefüggő marad.

A legnagyobb olyan k egész számot, amelyre még a G gráf k -szorosán élösszefüggő, $\lambda(G)$ -vel jelöljük.

Menger tétele többszörös él- és pontösszefüggőségre.

A G gráf akkor és csak akkor k -szorosán élösszefüggő, ha bármely két pontja között létezik k élidegen út.

A G gráf akkor és csak akkor k -szorosán pontösszefüggő, ha legalább $k + 1$ pontja van, és bármely két pontja között létezik k pontidegen út.

Megfigyelés.

Tetszőleges G gráf esetén $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, ahol $\delta(G)$ a gráf minimális fokszámát jelöli.

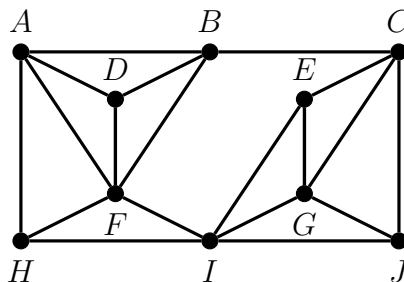
1. Maximálisan hány páronként él-, illetve pontdiszjunkt út adható meg az alábbi pontpárok között az alábbi gráfban?

(a) B és I

(b) A és J

(c) B és C

Határozzuk meg a gráf pont-, illetve élösszefüggőségi számát.



2. Hányszorosán összefüggő/élösszefüggő

- (a) egy fa; (c) egy teljes gráf;
(b) egy kör; (d) egy teljes páros gráf?

3. A 15-pontú G gráf egy 4-pontú, egy 5-pontú és egy 6-pontú körből készült úgy, hogy az 5-pontú kör minden csúcsát összeköttöttük (egyetlen éllel) a másik két kör minden csúcsával. Legyen s a 4-pontú kör egyik csúcsa, t pedig a 6-pontú kör egyik csúcsa.

- (a) Maximálisan hány páronként pontdiszjunkt út adható meg s és t között G -ben?
(b) Maximálisan hány páronként éldiszjunkt út adható meg s és t között G -ben?

4. Húzzunk be 3 élet két diszjunkt 5-csúcsú teljes gráf csúcsai közé úgy, hogy a kapott G gráf egyszerű legyen. Igaz-e, hogy G minden esetben

- (a) háromszorosan összefüggő; (b) háromszorosan élösszefüggő?

5. Tegyük fel, hogy a G gráfban a rögzített x és y pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az x és y pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6 vagy 7?

6. Bizonyítsuk be, hogy ha a G irányított gráfban van u -ból v -be is és v -ből w -be is k éldiszjunkt irányított út, akkor G -ben létezik u -ból w -be is k éldiszjunkt irányított út.

7. Legyen G egy tetszőleges 3-élösszefüggő gráf, és legyen C a G egy 3-hosszú köre. Bizonyítsuk be, hogy G -ből C éleit törölve összefüggő gráfot kapunk.

8. Mutassuk meg, hogy egy háromszorosan összefüggő gráfban mindig létezik páros hosszúságú kör.

9. A G egyszerű, n -csúcsú gráfban bármely két, nemszomszédos csúcsra teljesül, hogy a fokszámaik összege legalább $n + k - 2$ (ahol $n > k \geq 1$ egész). Bizonyítsuk be, hogy G k -szorosan összefüggő.

10. Egy 10-csúcsú egyszerű gráfnak 40 éle van. Határozzuk meg a legnagyobb olyan k számot, melyre a gráf biztosan k -szorosan pontösszefüggő.

11. Minimálisan és maximálisan hány éle lehet egy n -csúcsú egyszerű G gráfnak, melyre $\lambda(G) = 2$?

12. Jelölje a (G, s, t, c) hálózatban m a maximális folyam értékét, továbbá jelölje $\lambda(s, t)$ az éldiszjunkt st -utak maximális számát a G gráfban. Legyen $c'(e) := c(e) + 1$ a hálózat minden e élére, és jelöljük m' -vel a (G, s, t, c') hálózatbeli maximális folyam értékét. Igazoljuk, hogy $m' \geq m + \lambda(s, t)$ teljesül.

13. Bizonyítsuk be, hogy egy 3-reguláris egyszerű gráf akkor és csak akkor k -szorosan élösszefüggő, ha k -szorosan pontösszefüggő.

14. Legyen G egy k -szorosan összefüggő gráf és A és B a G csúcsainak k -elemű, diszjunkt részhalmaizai. Bizonyítsuk be, hogy létezik G -ben k darab páronként (teljes egészében, nem csak belsőleg) pontdiszjunkt út úgy, hogy mindegyik A és B -beli pontokat köt össze.