Euler-körséták és Hamilton-körök

Bevezetés a számításelméletbe 2

3. gyakorlat

2024.

Tétel.

Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor van Euler-körséta, ha G minden csúcsának fokszáma páros.

Tétel.

Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor van Euler-séta, ha G-ben a páratlan fokszámú csúcsok száma 0 vagy 2.

Állítás.

Ha a G gráfban létezik k olyan csúcs, amelyeket elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik szét, akkor nem létezik a gráfban Hamilton-kör.

Ha a G gráfban létezik k olyan csúcs, amelyeket elhagyva a gráf több, mint $k+1$ komponensre esik szét, akkor nem létezik a gráfban Hamilton-út.

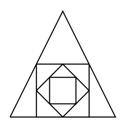
Dirac-tétel.

Ha az n-csúcsú G gráfban (ahol $n \geq 3$) minden pont foka legalább $n/2$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.

Ore-tétel.

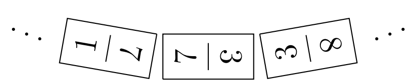
Ha az n-csúcsú G gráfban (ahol $n \geq 3$) minden x, y nemszomszédos csúcsokra teljesül, hogy $d(x)+d(y) \geq n$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.

1. Ha lehet, rajzoljuk le az alábbi ábrát egy vonallal, a ceruza felemelése nélkül.



2. Egy gráf csúcsai egy 6-elemű halmaz 3-elemű részhalmazai; két különböző csúcsot akkor kötünk össze, ha a megfelelő halmazoknak legfeljebb 1 közös eleme van. Van-e Euler-körséta a gráfban?
3. Az $r \in \{1, 2, \dots, 9\}$ értékek közül melyekre igaz, hogy minden 10-csúcsú, r-reguláris, egyszerű gráfban van Euler-körséta?
4. A G gráf tartalmaz olyan zárt élsorozatot, amely G minden élét páratlan sokszor tartalmazza. Igaz-e mindig, hogy ekkor G tartalmaz Euler-körsétát is?
5. Egy 59-csúcsú egyszerű gráfban bármely két csúcs fokszámösszege 60-nál nagyobb páros szám. Igaz-e, hogy a gráfban biztosan van Euler-körséta?
6. A G egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$, és G-ben szomszédos az 1 a 8-cal, ezen kívül pedig az $x, y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok pontosan akkor szomszédosak G-ben, ha $|x-y| \leq 2$.
   (a) Milyen hosszú G-ben a lehető leghosszabb séta?
   (b) Legalább hány csúcsot kell törölni G-ből ahhoz, hogy a kapott gráfnak legyen Euler-sétája?
7. Bejárható-e a
   (a) 4×4-es, (b) 3×5-ös, (c) 3×6-os
   sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk?
8. A G egyszerű gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \dots, 10\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x-y| = 2$ vagy $|x-y| = 3$.
   (a) Van-e G-ben Hamilton-út? (b) Van-e G-ben Hamilton-kör?
9. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak 20 csúcsa van és bármely fokszáma legalább 12, akkor G-nek van két olyan Hamilton-köre, melyeknek nincs közös éle.

10. A 101-csúcsú, egyszerű G gráf pontosan két csúcsának a foka 50, az összes többi csúcsának a foka legalább 51. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út.
11. A G egyszerű gráfnak $2k+1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább k a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út.
12. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$. A $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ csúcsokról tudjuk, hogy mindegyiknek a foka legalább $n/2$. (Sajnos a v_n csúcsról ezt nem tudjuk.) Bizonyítsuk be, hogy van egy út G-ben a v_1, $v_2, \ldots, v_{n-1}$ csúcsokon.
13. A G gráf egy 101-csúcsú „csillag” – vagyis az egyik csúcsa szomszédos az összes többivel, de a gráfnak ezen kívül több éle nincs. (Így tehát G-nek egy 100-fokú és száz 1-fokú csúcsa van.) Minimálisan hány élet kell hozzávenni G-hez, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör?
14. Egy 51-csúcsú összefüggő egyszerű gráfban egy csúcs foka 30, a többié 19.
    (a) Bizonyítsuk be, hogy a gráf komplementerében van Hamilton-kör.
    (b) Bizonyítsuk be, hogy az eredeti gráfhoz hozzá lehet venni 25 élet úgy, hogy a kapott gráf is egyszerű legyen, és legyen Euler-körsétája.
15. Egy képzeletbeli nyelv hangkészlete 10 magánhangzóból és 21 mássalhangzóból áll. Ezen a nyelven nincsenek kettős hangzók és tilos a mássalhangzótorlódás; vagyis sem két azonos hang, sem két különböző mássalhangzó soha nem állhat egymás mellett. (Viszont minden más lehetséges, vagyis bármely két különböző hang állhat egymás után, ha legalább az egyikük magánhangzó.) Legfeljebb milyen hosszú megengedett hangsor készíthető ezen a nyelven, ha a bármely hang többször is felhasználható, de további feltétel, hogy bármely két különböző hang legfeljebb egyszer állhat egymás mellett a hangsorban?
16. Egy 20-tagú társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer a többiek közül. Bizonyítsuk be, hogy le tudnak ülni egy kör alakú asztal köré vagy úgy, hogy mindenki mindkét szomszédját ismeri, vagy úgy, hogy senki sem ismeri egyik szomszédját sem.
17. Egy banketten 50 vendég vesz részt, mindegyikük legalább 5 embert ismer a többiek közül. (Az ismeretségek kölcsönösek.) A vendégek közül bárhogyan is választunk 3-at, 4-et vagy 5-öt, ezek nem tudnak leülni egy kör alakú asztal köré úgy, hogy mindenki mindkét szomszédját ismerje. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az összes vendég le tud ülni egy 50-fős, kör alakú asztal köré úgy, hogy bármely két, egymás mellett ülő, de egymást nem ismerő embernek legyen a vendégek közt közös ismerőse!
18. Létezik-e olyan lépéssorozat a 8×8-as sakktáblán egy lóval, amire teljesül, hogy minden, egymástól (egyetlen) lólépés távolságra lévő mezőpár esetén a lépéssorozat során pontosan egyszer lépünk e közül a két mező közül az egyikről a másikra?
19. Egy dominókészlet minden dominójának két felén két különböző, 1 és n közötti egész szám áll (ahol $n > 1$ egész). Tudjuk, hogy bárhogyan választunk két különböző 1 és n közötti egészt, pontosan egy olyan dominó van a készletben, aminek két felén épp a két kiválasztott szám áll. A feladatunk az, hogy a készlet összes dominóját elhelyezzük egyetlen körben úgy, hogy az egymás mellé kerülő dominófeleken azonos szám álljon (lásd az ábrát). Határozzuk meg, hogy mely n-ek esetén létezik ilyen elhelyezés.



20. Legyen G egy egyszerű gráf, és $u, v \in V(G)$ két olyan csúcs, hogy $d(u) + d(v) \geq n$. Bizonyítsuk be, hogy a G gráfnak pontosan akkor van Hamilton-köre, ha a $G + uv$ gráfnak van Hamilton-köre.
21. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 10-csúcsú, összefüggő, egyszerű G gráf fokszámai 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, akkor G-nek van olyan feszítőfája, aminek legfeljebb 4 levele van.