Szélességi bejárás, minimális költségű feszítőfák

Bevezetés a számításelméletbe 2

4. gyakorlat

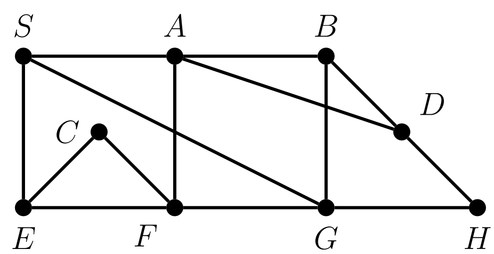
2024.

1. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával. Keressünk G-ben a-ból kiinduló szélességi feszítőfát, és osztályozzuk a szélességi bejárás során a gráf éleit. Mennyi lesz a csúcsok a-tól való távolsága?

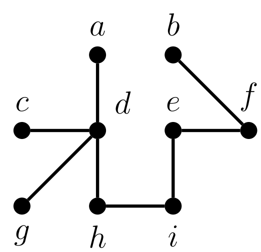
$\boldsymbol{a}$: b, c	$\boldsymbol{b}$: a, d	$\boldsymbol{c}$: a, d	$\boldsymbol{d}$: b, c, e, f
$\boldsymbol{e}$: d, f, g	$\boldsymbol{f}$: d, e, g, h	$\boldsymbol{g}$: e, f, h	$\boldsymbol{h}$: f, g

2. (a) A BFS algoritmus az alábbi gráf csúcsait a következő sorrendben járta be: S, $\square$, $\square$, $\square$, H, $\square$, F, C, $\square$. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS fát.

   (b) Tartalmazhatja-e a $\{D, H\}$ élet a gráf egy S-ből indított tetszőleges BFS bejárásához tartozó BFS-fája?



3. Tegyük fel, hogy az alábbi ábrán látható F fa a G gráfnak egyszerre a h-gyökerű BFS fája és a d-gyökerű DFS fája. Legfeljebb hány éle lehet G-nek?



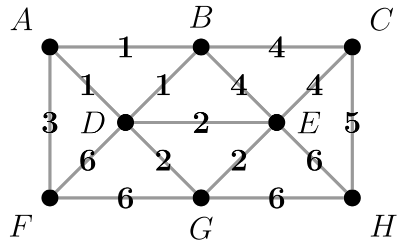
4. Legyen G egyszerű, irányítatlan gráf, a és b pedig G két különböző csúcsa. Igaz-e, hogy ha G-nek egy, az a-ból indított szélességi bejárása a b csúcsot ötödiknek találja meg, akkor biztosan létezik G-nek olyan, b-ből indított szélességi bejárása, mely az a csúcsot ötödiknek találja meg?

5. (a) Tervezzünk olyan algoritmust, amely egy adott G gráf és $e \in E(G)$ él esetén eldönti, hogy G-ben van-e e-t tartalmazó kör és ha igen, akkor megtalálja az ilyen körök közül a legrövidebbek egyikét.

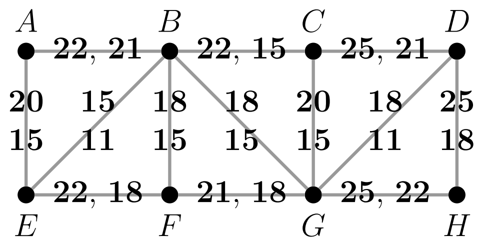
   (b) Mi a helyzet akkor, ha adott él helyett egy adott $v \in V(G)$ csúcsot tartalmazó legrövidebb kört kell találnunk?

6. (a) Határozzuk meg az alábbi gráf egy minimális összsúlyú feszítőfáját.

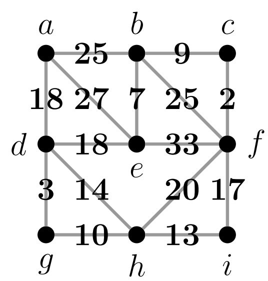
   (b) Hány különböző kimenete lehet a Kruskal-algoritmusnak?



7. Az alábbi ábrán látható G gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élen két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amelyen G minden pontja elérhető. Határozzunk meg egy lehető legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt.



8. Az alábbi ábrán látható a G irányítatlan gráf és az élek költségei. Határozzuk meg, hogy ha az e és a h csúcsok közé behúzunk egy új élet, akkor ezen élnek milyen (nemnegatív) költséget adhatunk ahhoz, hogy biztosan benne legyen a kapott gráfnak legalább egy minimális összsúlyú feszítőfájában.



9. Legyen G összefüggő gráf és $w: E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Tegyük fel, hogy G-ben az e él egyik végpontja v és a v-re illeszkedő minden f élre $w(e) \leq w(f)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami tartalmazza e-t.

10. Legyen G összefüggő gráf és $w: E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Legyen továbbá C egy kör G-ben és e a C egy éle. Tegyük fel, hogy a C kör minden f élére $w(f) \leq w(e)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami nem tartalmazza e-t.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ összefüggő gráf minden élének különböző a költsége, akkor G minimális költségű feszítőfája egyértelmű.

12. Adott egy $G = (V, E)$ gráf és élein egy $w\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Legyen tetszőleges $c \in \mathbb{R}_+$ esetén $E_c := \big\{e \in E \;\big|\; w(e) \leq c\big\}$, valamint legyen $G_c := (V, E_c)$. Bizonyítsuk be, hogy egy $F \subseteq E$ élhalmaz pontosan akkor alkotja a G gráf egy minimális költségű feszítőfáját, ha tetszőleges $c \in \mathbb{R}_+$ esetén $F \cap E_c$ élhalmaz a G_c gráf egy feszítőerdejét alkotja.

13. Legyen G egy összefüggő gráf és $w\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény G élein. Mutassuk meg, hogy G minden minimális összsúlyú feszítőfája megkapható a Kruskal-algoritmus egy lehetséges futásának eredményeként.

14. Adott egy $G = (V, E)$ gráf és élein egy $w\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Egy lépésben megépíthetjük G egy tetszőleges élét, ám ennek hatására minden meg nem épített él költsége megduplázódik. Tervezzünk hatékony algoritmust, ami a lehető legolcsóbban építi meg G egy feszítőfáját.