

Színezés

BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 2

5. gyakorlat

2024.

Kromatikus szám.

A G egyszerű gráf csúcsainak egy színezésén színeknek a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak.

A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G) = k$, ha a G gráf k színnel kiszínezhető, de $k - 1$ színnel nem.

Klikk.

A G gráf egy teljes részgráfját klikknek nevezzük. A G -ben található maximális méretű klikk méretét $\omega(G)$ -vel jelöljük és a gráf klikkszámának nevezzük.

Állítás.

Minden G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ teljesül.

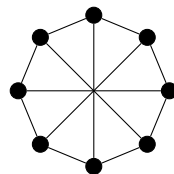
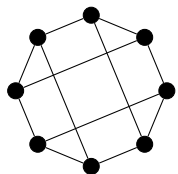
Páros gráf.

Egy G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha $\chi(G) \leq 2$, azaz ha a csúcshalmaza felbontható két diszjunkt halmazra úgy, hogy G minden éle kizárólag eközött a két halmaz között futhat.

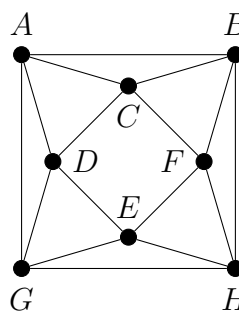
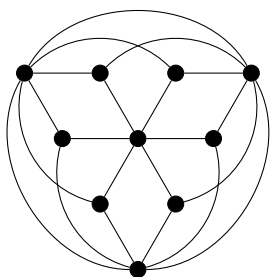
Állítás.

Egy gráf pontosan akkor páros, ha nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

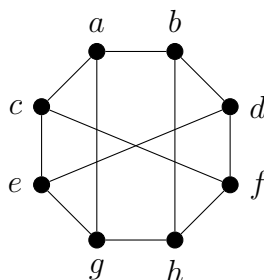
- Döntsük el, hogy az alábbi gráfok párosak-e.



- Határozzuk meg az alábbi gráfok kromatikus számát.



- Állapítsuk meg, hány szín kell az alábbi ábrán látható G gráf a, b, c, d, e, f, g, h sorrendben történő mohó színezéséhez. Milyen színt kap ekkor a h csúcs?



4. Egy egyszerű gráfban pontosan egy páratlan kör van. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.
5. Legyen a G gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 9999\}$ és tegyük fel, hogy G minden csúcsa a nála kisebb számok közül legfeljebb tízzel szomszédos. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 11$.
6. Egy 10-csűcsű egyszerű gráfban van egy 5-, egy 4- és egy 3-fokú csúcs, minden más csúcs foka 2. Mutassuk meg, hogy a gráf színezhető 3 színnel.
7. Legyen a G teljes gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, \dots, 10\}$. Hagyjuk most el G -ből az $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$ és a $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$ éleket. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.
8. Egy szabályos tizenegyszögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (11-csűcsű, 22-élű) gráf kromatikus számát.
9. A 16-csűcsű G gráf csúcsai legyenek a síknak azok a pontjai, amiknek mindkét koordinátája 1 és 4 közötti egész szám (beleértve az 1-et és a 4-et is). Az egymástól különböző $P = (a; b)$ és $Q = (c; d)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G -ben, ha $|a - c| \leq 1$ vagy $|b - d| \leq 1$. Határozzuk meg a G gráf kromatikus számát.
10. Határozzuk meg a 100-csűcsű, illetve a 101-csűcsű kör komplementerének a kromatikus számát.
11. A $K_{3,3}$ teljes páros gráfba behúzzunk két nem csatlakozó élet úgy, hogy a kapott G gráf egyszerű legyen. Határozzuk meg G kromatikus számát.
12. Készítsük el a G gráfot egy 7-hosszú körből úgy, hogy hozzáadunk a körhöz $\binom{7}{3}$ új csúcsot, és az új csúcsok mindegyikét a kör három pontjával kötjük össze úgy, hogy semelyik két új csúcsnak se ugyanazok a körbeli csúcsok legyenek a szomszédai. Határozzuk meg a G gráf kromatikus számát.
13. Legyen G olyan 7-csűcsű, egyszerű gráf, melyre G -ben és a komplementerében is van Hamilton-kör. Mutassuk meg, hogy ekkor G kromatikus száma 3 vagy 4.
14. Egy sakktáblán 7 huszár áll úgy, hogy mindegyik legalább két másikat tud ütni. Mutassuk meg, hogy biztosan van közöttük olyan, amelyik három másikat is tud ütni.
15. Egy 9-csűcsű, egyszerű gráfnak 21 éle van. Mutassuk meg, hogy a gráfban van páratlan kör.
16. Tegyük fel, hogy a G gráfot megszíneztük $\chi(G)$ színnel; legyen ezek közül a színek közül kettő a piros és a kék. Bizonyítsuk be, hogy ekkor található a gráfban két szomszédos csúcs, amelyek közül az egyik piros, a másik kék.
17. Bizonyítsuk be, hogy minden e -élű G egyszerű gráfra $e \geq \binom{\chi(G)}{2}$ teljesül.
18. Tegyük fel, hogy a G gráf 4-színezhető és véges. Igazoljuk, hogy kiválasztható G éleinek legfeljebb hatodrésze úgy, hogy a kiválasztott élek G -ből való törlésével kapott G' gráf 3-színezhető legyen.
19. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges e -élű egyszerű gráf élei közül elhagyható legfeljebb $e/2$ úgy, hogy a maradék gráf páros legyen.
20. Adjunk példát olyan gráfra, melynek kromatikus száma 8, de egy alkalmas Hamilton-körének éleit törölve a kromatikus szám 4-re csökken.
21. Adjunk meg olyan gráfot, melyből tíz alkalmas élet törölve a kromatikus szám tízzel csökken és határozzuk meg az ilyen gráfok csúcsszámának minimumát.