Intervallumgráfok, görög betűk I.

Bevezetés a számításelméletbe 2

6. gyakorlat

2024.

Intervallumgráf.

Egy G egyszerű gráfot intervallumgráfnak nevezünk, ha csúcsainak megfeleltethetők (korlátos és zárt) intervallumok a számegyenesen úgy, hogy két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő intervallumoknak van közös pontja.

Intervallumgráfok optimális színezése.

Legyen G egy intervallumgráf és tegyük fel, hogy G reprezentálható az $\{I_1, \ldots, I_n\}$ intervallumrendszerrel. Ekkor G csúcsait a megfelelő intervallumok balvégpontja szerinti növekvő sorrendben mohón színezve egy optimális színezést kapunk.

Tétel.

Minden G intervallumgráfra $\chi(G) = \omega(G)$ teljesül.

Párosítás (független élhalmaz).

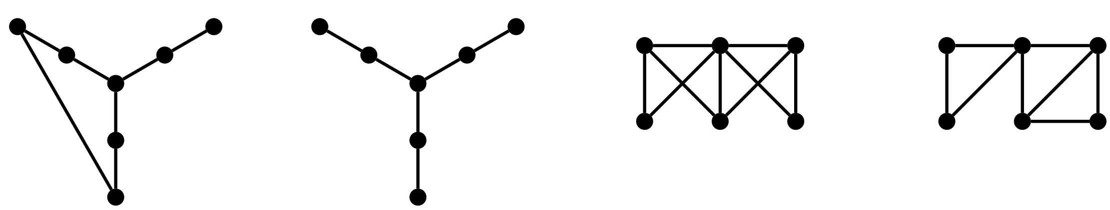
Egy G gráf $M \subseteq E(G)$ élhalmazát párosításnak vagy független élhalmaznak nevezzük, ha semelyik két M-beli élnek nincs közös végpontja.

Lefogó ponthalmaz.

Egy G gráf $X \subseteq V(G)$ ponthalmazát lefogó ponthalmaznak nevezzük, ha G minden élének legalább az egyik végpontja X-beli.

1. Tekintsük azokat a zárt intervallumokat a számegyenesen, amelyeknek mindkét végpontja 0 és 7 közötti egész, a hosszuk pedig 2 vagy 3. Adjuk meg az ezek által meghatározott intervallumgráf egy optimális színezését.

2. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok intervallumgráfok-e.



3. Létezik-e 5-csúcsú, 8-élű intervallumgráf?

4. Tekintsük azokat a zárt intervallumokat a számegyenesen, amelyeknek mindkét végpontja 1 és 100 közötti egész szám, a hosszuk legalább 1 és legfeljebb 4, valamint legalább az egyik végpontjuk páros szám. Határozzuk meg az ezek által meghatározott intervallumgráf kromatikus számát.

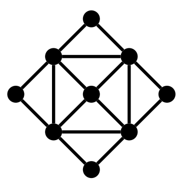
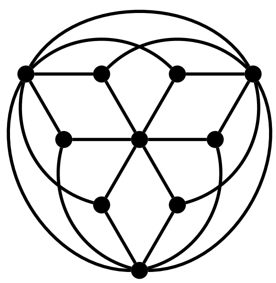
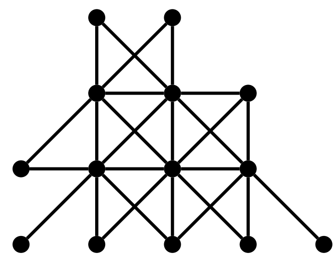
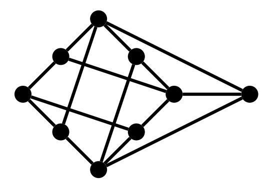
5. Egy adott intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha az intervallumrendszerből törlünk néhány olyan intervallumot, melyek közt semelyik háromnak nincs közös pontja, akkor a visszamaradó intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma legalább 8.

6. Határozzuk meg az összes olyan fát, amely egyben intervallumgráf is.

7. Létezik olyan G gráf, amire $\omega(G) = 100$ és $\chi(G) = 1000$ teljesül?

8. Jelölje G_5 azt a Zykov konstrukciója által előállított (384160560-csúcsú) gráfot, amire $\omega(G_5) = 2$ és $\chi(G_5) = 5$. Van-e G_5-ben Hamilton-kör? (A konstrukciót az ötcsúcsú körből, mint G_3 gráfból indítottuk.)

9. Adjunk meg egy maximális független élhalmazt és egy minimális lefogó csúcshalmazt az alábbi gráfokban.

10. Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nemnagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő egészek legnagyobb közös osztója pontosan 2. Határozzuk meg $\nu(G)$-t és $\tau(G)$-t.

11. A $2k$-csúcsú G egyszerű gráfban a nemszomszédos u és v csúcsok foka $k-1$, az összes többi csúcs foka legalább k (ahol $k > 1$ egész). Mutassuk meg, hogy G-ben van teljes párosítás.

12. Egy 10-csúcsú egyszerű gráfban a maximális fokszám 6, a független élek maximális száma 5. Mutassuk meg, hogy a gráfban van páratlan kör.

13. Bizonyítsuk be, hogy a $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ egyenlőtlenség minden egyszerű G gráfra teljesül.

14. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráf valamely párosítása tovább már nem bővíthető (azaz nincs olyan él a gráfban, melyet hozzávéve párosítás marad), akkor legalább feleannyi élet tartalmaz, mint G egy maximális párosítása.

15. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq \tau(G) + 1$ teljesül minden (hurokélmentes) G gráfra.

16. Legyen G és H két gráf ugyanazon a V csúcshalmazon, J pedig az a gráf, melynek csúcshalmaza szintén V, élhalmaza pedig G és H élhalmazainak uniója. Mutassuk meg, hogy

$$\chi(J) \leq \chi(G) + \tau(H).$$

17. A G egyszerű gráfra $\chi(G) = 10$ és $\tau(G) = 9$ teljesül. Határozzuk meg $\omega(G)$-t.