Görög betűk II.

Bevezetés a számításelméletbe 2

7. gyakorlat

2024.

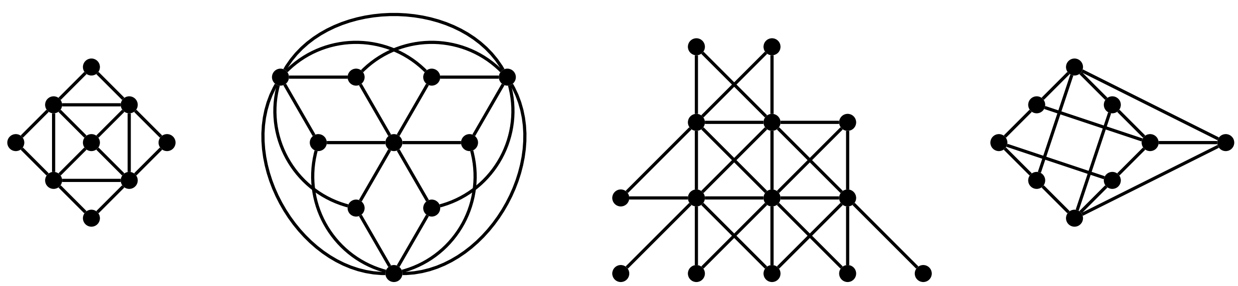
Független ponthalmaz.

Egy G gráf $Y \subseteq V(G)$ ponthalmazát független ponthalmaznak nevezzük, ha semelyik két Y-beli pont között nem vezet él és semelyik Y-beli csúcsra nem illeszkedik hurokél G-ben.

Lefogó élhalmaz.

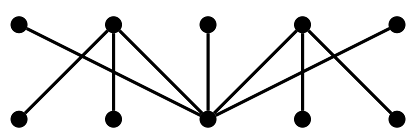
Egy izolált pontot nem tartalmazó G gráf egy $Z \subseteq E(G)$ élhalmazát lefogó élhalmaznak nevezzük, ha G minden csúcsára illeszkedik legalább egy Z-beli él.

1. Adjunk meg egy maximális független csúcshalmazt és egy minimális lefogó élhalmazt az alábbi gráfokban.



2. A 20-csúcsú G gráf élei közül bárhogyan is választunk ki 8-at, G-nek mindig van olyan csúcsa, amire legalább kettő illeszkedik a kiválasztott élek közül. Mutassuk meg, hogy ekkor bárhogyan választunk ki G élei közül 12-t, G-nek mindig lesz olyan csúcsa, amire egy sem illeszkedik a kiválasztott élek közül.

3. Legalább hány élt kell hozzávenni az alábbi gráfhoz ahhoz, hogy a kapott gráfban legyen teljes párosítás?



4. Tegyük fel, hogy a 100-csúcsú G páros gráfnak van teljes párosítása. Határozzuk meg a lefogó pontok minimális számát abban a H gráfban, melyet G-ből egy tetszőleges további él behúzásával kapunk.

5. Bizonyítsuk be, hogy a $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$ egyenlőtlenség minden n-csúcsú, hurokélmentes G gráfra teljesül.

6. Tegyük fel, hogy a 100-csúcsú G gráfból akárhogyan hagyunk el egy élt, a kapott gráf 4 színnel színezhető. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha(G) \geq 24$.

7. Tegyük fel, hogy $\nu(G) = 2$ és $\tau(G) = 4$. Bizonyítsuk be, hogy $3 \leq \chi(G) \leq 5$.

8. Mennyi az $\alpha(G) + \nu(G)$ lehetséges legnagyobb értéke, ha G tetszőleges 100-csúcsú gráf lehet?

9. Egy 50-csúcsú egyszerű gráfban a maximális fokszám 7. Mutassuk meg, hogy van a gráfban 7-csúcsú független ponthalmaz.

10. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$.

11. Legyenek a G gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok és az $i, j \in 1, \ldots, 100$, $i \neq j$ csúcsok között akkor vezet él, ha $i \mid j$ vagy $j \mid i$. Határozzuk meg $\tau(G)$-t.