

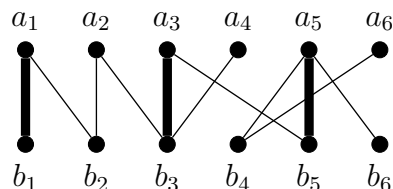
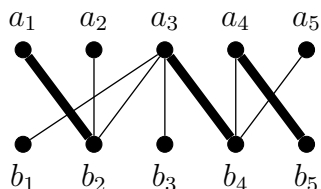
Maximális párosítás keresése páros gráfokban

BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 2

8. gyakorlat

2024.

1. Az ábrán látható gráfokban keressünk egy-egy maximális párosítást a javító utas algoritmussal a vastag vonalakkal jelölt párosításokból kiindulva, valamint adjunk meg egy-egy minimális lefogó pontthalmazt is.



2. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j -vel, ha az alábbi mátrix i -edik sorának és j -edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G -ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Tegyük fel, hogy a G páros gráfban $\alpha(G) = 21 = \nu(G)$ teljesül. Hány csúcsa van G -nek?
4. Mutassuk meg, hogy egy fának nem lehet két különböző teljes párosítása.
5. Egy egyszerű páros gráf mindkét osztályában pontosan 5 csúcs van, és minden csúcs foka legalább 2. Igaz-e, hogy a gráfban biztosan van teljes párosítás?
6. Egy 20-csúcsú G páros gráfban 18 csúcs foka 5, a maradék 2 csúcs foka 3. Mutassuk meg, hogy G -ben van teljes párosítás.
7. Egy 11-csúcsú fában minden csúcs foka legfeljebb 3. Mutassuk meg, hogy a fában van 4-élű párosítás.
8. Egy 10-csúcsú páros gráfban minden csúcs foka 3 vagy 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás.
9. Valaki találmásra szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy 2-es, egy 3-as, ..., egy ász).

10. A sakktáblán találomra elhelyezve a 32 sakkfigurát azt vesszük észre, hogy minden sorba és minden oszlopba éppen 4 figura került. Bizonyítsuk be, hogy a figurák közül kiválasztható 8 úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban éppen 1 van a kiválasztottak közül.
11. Tegyük fel, hogy a G páros gráf minden A színosztálybeli csúcsának fokszáma 6, míg minden B színosztálybelié 4. Határozzuk meg a G -beli független élek maximális számát, ha a B színosztály 63 csúcsból áll.
12. Egy 100×100 -as sakktáblán kijelölünk 30 mezőt úgy, hogy összefüggő területet alkossanak, vagyis bármely kijelölt mezőből el lehessen jutni bármelyik másikba úgy, hogy oldalszomszédos kijelölt mezőkre léphetünk át (akárhányszor). Mutassuk meg, hogy ekkor a kijelölt mezőkön mindig el lehet helyezni 8 darab 1×2 -es dominót átfedés nélkül úgy, hogy minden dominó a sakktábla két szomszédos mezőjét fedje le.