Hall-tétel, élszínezés

Bevezetés a számításelméletbe 2

9. gyakorlat

2024.

Frobenius-tétel.

Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

Hall-tétel.

Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van A-t lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

1. Tegyük fel, hogy a 88-pontú G páros gráfban $\alpha(G) = 44$. Igazoljuk, hogy G-re teljesül a Hall-feltétel, azaz $|X| \leq |N(X)|$ az A színosztály minden X részhalmaza esetén.
2. Tegyük fel, hogy a 100-csúcsú $G = (A, B; E)$ páros gráf A és B színosztályára is teljesül a Hall-feltétel. Határozzuk meg $\tau(G)$ értékét.
3. Tegyük fel, hogy a $G = (A, B; E)$ páros gráf élei pirosra és zöldre vannak színezve úgy, hogy a piros élek gráfjában A-ra, a zöld élek gráfjában pedig B-re teljesül a Hall-feltétel. Igazoljuk, hogy G-nek van olyan H feszítő részgráfja, aminek minden komponense egy piros és zöld éleket felváltva tartalmazó kör.
4. Tegyük fel, hogy G egy páros gráf, és hogy $\tau(G') = \tau(G)$ teljesül minden olyan G' páros gráfra, amely G-ből egy újabb él behúzásával jön létre. Igazoljuk, hogy G kisebbik színosztályára teljesül a Hall-feltétel.
5. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf A színosztálya 28, a B színosztálya 33-pontú, valamint a B színosztálynak valamely Y részhalmazára $|Y| = 18$ és $|N(Y)| = 12$. Mutassuk meg, hogy az A színosztályra nem teljesül a Hall-feltétel.
6. Adott n fiú és n lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.
7. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható.
8. Egy kiránduláson a résztvevő n házaspár között akarunk szétosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a csokoládék közül, és hogy minden csokoládét minden házaspárnak legalább az egyik tagja szereti. Bizonyítsuk be, hogy a csokoládék kioszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amilyet szeret.
9. Tegyük fel, hogy G egy páros gráf A és B osztályokkal, és minden $X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X| - 1$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz olyan párosítást, ami A-t egy pont kivételével lefedi.
10. Tegyük fel, hogy G egy páros gráf A és B színosztályokkal. A-ban minden pont foka 40, B-ben 30.
    (a) Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz A-t fedő párosítást.
    (b) Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 10 éldiszjunkt A-t fedő párosítást.

11. A villamosmérnök-hallgatók számára beüzemeltek néhány számítógépet. Minden hallgatónak legalább 10 gépre van belépési jogosultsága, minden gépen pedig legfeljebb 7 hallgatónak van felhasználói fiókja. Igaz-e, hogy ekkor bizonyosan leültethetünk minden villamosmérnök-hallgatót egy-egy különböző számítógéphez úgy, hogy mindenki olyan géphez üljön, amire be tud lépni?

12. Egy szigeten n család lakik. A sziget elöljárói felosztották az egész szigetet n egyenlő területű vadászati körzetre és ezzel egyidejűleg (az előbbitől függetlenül, ezért egészen más módon) felosztották az egész szigetet n egyenlő területű mezőgazdasági területre. Most azt szeretnék elérni, hogy minden családhoz tartozzon egy vadászati és egy mezőgazdasági terület úgy, hogy a két területnek legyen közös része. Megoldható-e ez mindig?

13. A faluban $2n$ lány és $2n$ fiú él. A lányoknak – akik párosával testvérek, és nem rokonaik a fiúknak – az a céljuk, hogy úgy házasodjanak össze a falubeli fiúkkal, hogy minden lány le tudja nyomni a férjét szkanderban. Tudjuk, hogy az i-edik lánytestvérpár bármelyik tagja képes legalább $2i-1$ fiút szkanderban legyőzni, ráadásul minden lány le tud győzni olyan fiút is, akit a testvére nem. Mutassuk meg, hogy lehetséges a kívánt házasítás.

14. A $G = (A, B; E)$ páros gráf mindkét pontosztálya 10-csúcsú (vagyis $|A| = |B| = 10$). A gráf minden e éléhez tartozik egy adott $w(e) \geq 0$ nemnegatív súly. Tudjuk, hogy a gráf minden v csúcsára teljesül, hogy a v-re illeszkedő élek összsúlya legalább 8 és legfeljebb 9 (és így v-re illeszkedik legalább egy él). Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás.