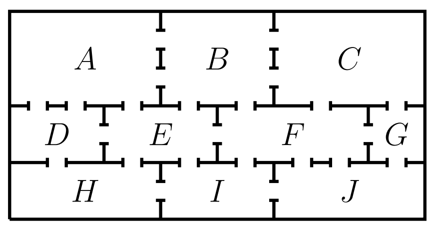
Gyakorlás

Bevezetés a számításelméletbe 2

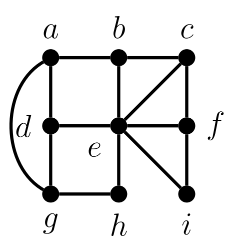
Konzultáció

2024.

1. Legyen G egy nem összefüggő, 10-csúcsú gráf. Bizonyítsuk be, hogy elhagyható G-ből 2 csúcs úgy, hogy a kapott gráf sem összefüggő.
2. A 39-csúcsú F fában a csúcsok fokszámai csak két különböző értéket vesznek fel, minden fokszám vagy d_1 vagy d_2. Izomorfia erejéig határozzuk meg az összes ilyen fát.
3. Az ábrán egy királyi palota alaprajza látható. A király minden reggel az A jelű lakosztályából sétára indul a palotában. A fejébe veszi, hogy séta közben minden ajtón pontosan egyszer szeretne átmenni. Ha ez sikerülne neki, a séta végpontját jelölné ki trónteremnek. De mivel sosem sikerül, az udvari bölcs azt tanácsolja, hogy falaztassa be az egyik ajtót. Van-e a palotában olyan ajtó, aminek a befalazása után már létezik a király vágyainak megfelelő séta? Ha igen, melyik szobából lehet a trónterem? (Az ábra a befalazás előtti állapotot mutatja.)



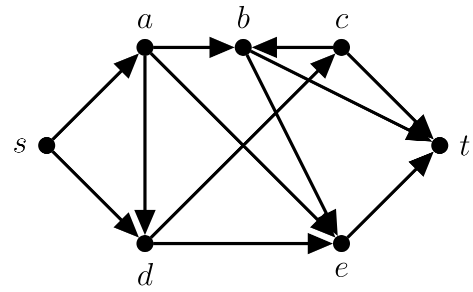
4. Legyen G egy 2023-csúcsú, r-reguláris gráf. Bizonyítsuk be, hogy G vagy $\overline{G}$ tartalmaz Euler-körsétát.
5. Van-e az ábrán látható G gráfnak olyan Hamilton-köre, ami nem tartalmazza az ab élt?



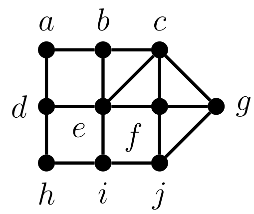
6. A 100-csúcsú G egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 51. Bizonyítsuk be, hogy bármely 98 csúcshoz van olyan kör, amely azokat tartalmazza, de a kimaradt 2 csúcsot nem.
7. Az n-csúcsú ($n \geq 3$) G gráf a következő tulajdonsággal rendelkezik: $\overline{G}$-ben bármely két szomszédos csúcs fokszámának az összege legfeljebb $n-2$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz Hamilton-utat.
8. Valaki a BFS algoritmust futtatta az alábbi gráfon és leírta, hogy az eljárás milyen sorrendben járta be a csúcsokat. Azonban a leírt sorozatban négy betű olvashatatlanná vált, ezeket $\square$-ek helyettesítik. Döntsük el az alábbiakról, hogy lehet-e a megmaradt, hiányos sorozat. Ahol a válasz igen, ott egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát.

   (a) S, $\square$, D, C, $\square$, $\square$, $\square$

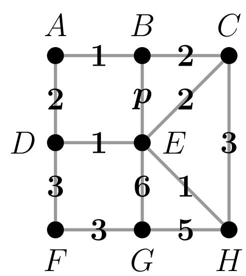
   (b) S, $\square$, D, E, $\square$, $\square$, $\square$



9. Legfeljebb hány keresztél keletkezik az alábbi G gráf e gyökérből indított BFS bejárása után?



10. A p pozitív valós paraméter minden értékére határozzunk meg egy minimális összsúlyú feszítőfát az alábbi gráfban.



11. Az n-csúcsú ($n \geq 3$) teljes gráf élein pozitív súlyok vannak úgy, hogy minden Hamilton-út egy minimális összsúlyú feszítőfa. Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden feszítőfa minimális összsúlyú feszítőfa.

12. Legyenek egy egyszerű gráf csúcsai az egész számok 1-től 20-ig, két különböző csúcs között vezessen él pontosan akkor, ha a megfelelő számok szorzata osztható 10-zel. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

13. Legyenek $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$, $G_3 = (V, E_3)$ tetszőleges páros gráfok és tekintsük a $G = (V, E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ gráfot. Bizonyítsuk be, hogy a G gráf 8 színnel színezhető.

14. A G gráfról annyit tudunk, hogy pontosan két páratlan kör van benne és mindkettő tartalmazza a v csúcsot.

   (a) Előfordulhat-e, hogy G kromatikus száma 2?

   (b) Előfordulhat-e, hogy G kromatikus száma 3?

   (c) Előfordulhat-e, hogy G kromatikus száma 4?

15. Legyen G egy olyan intervallumgráf, amely tartalmaz 2013-csúcsú kört. Igaz-e feltétlenül, hogy G tartalmaz 3-csúcsú kört?