

# Gráfelméleti alapfogalmak

## BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 2

### 1. gyakorlat 2025.

#### Komplementer gráf.

Egy  $G$  egyszerű gráf komplementerén azt a  $\bar{G}$  gráfot értjük, melyben két csúcs pontosan akkor szomszédos, ha  $G$ -ben nem azok.

#### Izomorfia.

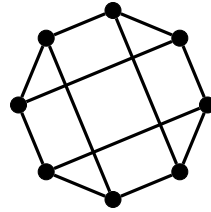
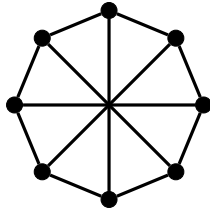
A  $G_1$  és  $G_2$  gráfokat izomorfaknak nevezzük, ha a csúcshalmazaik között létezik olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy  $G_1$ -ben bármely két csúcs között pontosan annyi él fut, mint a nekik megfelelő csúcsok között  $G_2$ -ben.

1. Igazoljuk, hogy ha egy 6-csúcsú  $G$  gráf fokszámai 2, 2, 2, 4, 5, 5, akkor  $G$  nem egyszerű.
2. A  $G$  irányítatlan gráfnak nyolc csúcsa van,  $a, b, c, d, e, f, g, h$ , melyek fokszámai rendre 6, 4, 4, 2, 2, 2, 1, 1. A  $G$  éleinek egy alkalmas irányításával létrejövő  $G'$  irányított gráfban a fenti csúcsokból rendre  $x, 3, 1, 1, 2, 1, 0, 0$  él lép ki. Határozzuk meg  $x$  értékét.
3. A 6-csúcsú  $G$  egyszerű gráfból irányított gráfot készítettünk úgy, hogy  $G$  minden élét véletlenszerűen az egyik vagy a másik irányba irányítottuk. Végül azt vettük észre, hogy a kapott irányított gráfban bármely két csúcs kifoka (vagyis a csúcsból kilépő élek száma) különböző. Rajzoljuk le a kapott irányított gráfot.
4. Egy 20-csúcsú, egyszerű gráfban nincs izolált csúcs, az egyfokú csúcsok száma pedig pontosan 3. Mutassuk meg, hogy a gráfnak legalább 19 éle van.
5. A 20-csúcsú  $G$  egyszerű gráfban 10 csúcs foka legfeljebb 7, a maradék 10 csúcs foka pedig legalább 16. Hány éle van  $G$ -nek?
6. Van olyan  $G$  gráf, melyben minden csúcs foka különböző? És ha a gráf egyszerű?
7. A 6-csúcsú  $G$  gráf hurokért nem, de többszörös éleket tartalmazhat. Tudjuk, hogy  $G$  bármely két csúcsának a foka különböző. Minimálisan hány éle van  $G$ -nek?
8. Mi lehet a  $G$  gráf, ha  $\Delta(G) \leq 2$ ? ( $\Delta(G)$  a  $G$  gráf maximális fokszámát jelöli.)
9. Rajzoljuk le az összes olyan, páronként nemizomorf, egyszerű gráfot, melyre

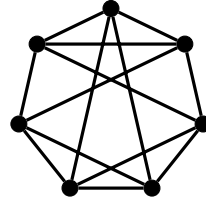
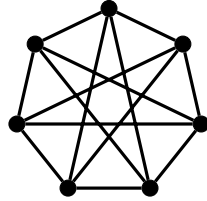
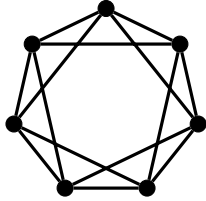
(a)  $n = 4, m = 5$ ;      (b)  $n = 5, m = 3$ ;      (c)  $n = 5, m = 7$ ;      (d)  $n = 5, m = 8$ ;

ahol  $n$ , illetve  $m$  jelöli a gráf csúcsainak, illetve éleinek a számát.

10. A  $G$  egyszerű gráf csúcshalmaza  $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ , melyben az 1-es csúcs szomszédos a 8-assal, ezen kívül pedig az  $x, y \in V(G)$ ,  $x \neq y$  csúcsok pontosan akkor szomszédosak  $G$ -ben, ha  $|x - y| \leq 2$ . Izomorf-e a  $G$  gráf a saját komplementerével?
11. Egy  $G$  gráf pontjai legyenek egy kocka csúcsai és két pont akkor legyen szomszédos, ha a kockában a megfelelő csúcsok él mentén szomszédosak. Az alábbi két gráf közül melyek izomorfak  $G$ -vel?



12. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



13. Mutassunk a komplementerével izomorf 5-, illetve 6-pontú gráfot.

14. Egy  $n$ -csúcú, egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább  $n/2$ . Mutassuk meg, hogy a gráf összefüggő, azaz bármelyik csúcsából el lehet jutni bármelyik másikba az élek mentén lépegetve.

15. Kovács úr és a felesége négy házaspárt látott vendégül. Érkezéskor a jelenlévők közül bizonyosak kezet fogtak egymással. Mikor már mindenki megérkezett, Kovács úr mindenkitől megkérdezte, hogy hány emberrel fogott kezet és csupa különböző választ kapott. Hány emberrel fogott kezet Kovács úr felesége? (Természetesen senki sem fogott kezet a saját házastársával.)

16. Egy 17-csúcú teljes gráf minden élét megszíneztük 3 különböző színnel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor keletkezett egyszínű háromszög.