Összefüggőség, fák

Bevezetés a számításelméletbe 2

2. gyakorlat

2025.

Fa.

Egy összefüggő, körmentes gráfot fának nevezünk.

Fák tulajdonságai.

- Minden n-csúcsú fának $n-1$ éle van.
- Minden legalább kétcsúcsú fának van legalább két levele.

Feszítőfa.

A G gráf egy feszítőfáján a G egy olyan részgráfját értjük, amely egy fa és G minden csúcsát tartalmazza.

Feszítőfa létezése.

Egy gráfnak pontosan akkor létezik feszítőfája, ha összefüggő.

1. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{2, 3, 4, \ldots, 21\}$ és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha közülük a kisebbik osztója a nagyobbiknak.
   (a) Hány komponense van G-nek?
   (b) Adjunk meg egy feszítőfát G mindegyik komponensében.
2. A G egyszerű gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Az $x, y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x - y| \leq 2$. Van-e G-nek olyan feszítőfája, amely
   (a) tartalmazza G-nek az összes olyan $\{x, y\}$ élét, amelyre $x, y \leq 3$ teljesül;
   (b) tartalmazza G-nek az összes olyan $\{x, y\}$ élét, amelyre $|x - y| = 2$ teljesül?
3. Egy 100-csúcsú, egyszerű gráfban minden pont foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élt úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen.
4. Egy 23-csúcsú, egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 7. Mutassuk meg, hogy bárhogy választunk ki a gráf csúcsai közül hármat, lesz köztük két olyan, melyek között van a gráfban út.
5. Egy 20-csúcsú G egyszerű gráfban 10 pont foka 5, a maradék 10 pont foka 14. Összefüggő-e a G gráf komplementere?
6. A 100-csúcsú, 80-élű G gráf nem tartalmaz kört. Hány komponense lehet G-nek?
7. Lehet-e néhány lépésben egy 88-csúcsú, 111-élű, 42-komponensű gráfból összefüggő gráfot képezni, ha minden lépésben két élt törlünk és egy élt húzunk be? (Korábban törölt él is behúzható.)
8. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan $n \geq 5$ csúcsú fa, melyben pontosan két fokszám fordul elő, mégpedig mindkettő $n/2$-ször (n páros).

9. Hány 3-fokú csúcsa lehet egy olyan 20-csúcsú fának, aminek pontosan tíz darab 1-fokú és pontosan egy darab 10-fokú csúcsa van?

10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fába behúzunk egy élt, akkor pontosan egy kör keletkezik.

11. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges T fának legalább $\Delta(T)$ levele van, ahol $\Delta(T)$ a T fában a maximális fokszámot jelöli.

12. Egy 100-csúcsú, összefüggő, egyszerű gráfnak 100 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző feszítőfa. (Két feszítőfa akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)

13. Egy 100-csúcsú, összefüggő, egyszerű gráfnak 102 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző kör. (Két kör akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)

14. Legyen G egyszerű, összefüggő gráf, e és f pedig G két éle. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan feszítőfája, mely e-t és f-et is tartalmazza.

15. A 10-csúcsú, egyszerű G gráfban teljesül, hogy bárhogyan is soroljuk fel a $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ csupa különböző csúcsokat, ahol $3 \leq k \leq 10$ tetszőleges egész szám, a $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}$ és $\{v_k, v_1\}$ párok közül legalább az egyik benne van G élhalmazában. Mutassuk meg, hogy ekkor G-nek legalább 36 éle van.

16. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráf és a komplementere közül legalább az egyik mindig összefüggő.

17. Határozzuk meg az összes olyan (legalább kétcsúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintsük azonosnak.)

18. Igazoljuk, hogy minden összefüggő gráfnak van olyan csúcsa, amelyet elhagyva a gráf összefüggő marad.

19. Adjuk meg az összes olyan 25-csúcsú F fát, amelyre létezik olyan $m \geq 2$ egész, hogy F minden pontjának a foka azonos maradékot ad m-mel osztva.