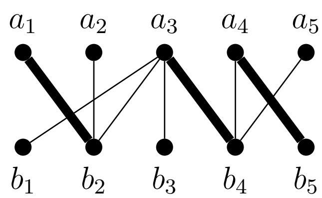
Maximális párosítás keresése páros gráfokban

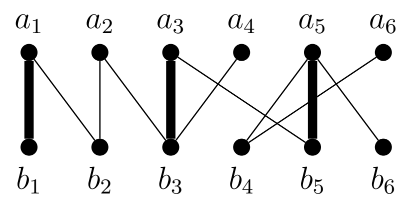
Bevezetés a számításelméletbe 2

8. gyakorlat

2025.

1. Az ábrán látható gráfokban keressünk egy-egy maximális párosítást a javító utas algoritmussal a vastag vonalakkal jelölt párosításokból kiindulva, valamint adjunk meg egy-egy minimális lefogó ponthalmazt is.





2. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha az alábbi mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Tegyük fel, hogy a G páros gráfban $\alpha(G) = 21 = \nu(G)$ teljesül. Hány csúcsa van G-nek?

4. Mutassuk meg, hogy egy fának nem lehet két különböző teljes párosítása.

5. Egy egyszerű páros gráf mindkét osztályában pontosan 5 csúcs van, és minden csúcs foka legalább 2. Igaz-e, hogy a gráfban biztosan van teljes párosítás?

6. Egy 20-csúcsú G páros gráfban 18 csúcs foka 5, a maradék 2 csúcs foka 3. Mutassuk meg, hogy G-ben van teljes párosítás.

7. Egy 11-csúcsú fában minden csúcs foka legfeljebb 3. Mutassuk meg, hogy a fában van 4-élű párosítás.

8. Egy 10-csúcsú páros gráfban minden csúcs foka 3 vagy 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás.

9. Valaki találomra szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy 2-es, egy 3-as, …, egy ász).

10. A sakktáblán találomra elhelyezve a 32 sakkfigurát azt vesszük észre, hogy minden sorba és minden oszlopba éppen 4 figura került. Bizonyítsuk be, hogy a figurák közül kiválasztható 8 úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban éppen 1 van a kiválasztottak közül.

11. Tegyük fel, hogy a G páros gráf minden A színosztálybeli csúcsának fokszáma 6, míg minden B színosztálybelié 4. Határozzuk meg a G-beli független élek maximális számát, ha a B színosztály 63 csúcsból áll.

12. A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G) = 3$, és G csúcsainak van olyan 3 színnel való színezése, amelyben az egyik színt csak egyetlen csúcs kapja. Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \leq \nu(G) + 1$.

13. Egy 100×100-as sakktáblán kijelölünk 30 mezőt úgy, hogy összefüggő területet alkossanak, vagyis bármely kijelölt mezőből el lehessen jutni bármelyik másikba úgy, hogy oldalszomszédos kijelölt mezőkre léphetünk át (akárhányszor). Mutassuk meg, hogy ekkor a kijelölt mezőkön mindig el lehet helyezni 8 darab 1×2-es dominót átfedés nélkül úgy, hogy minden dominó a sakktábla két szomszédos mezőjét fedi le.