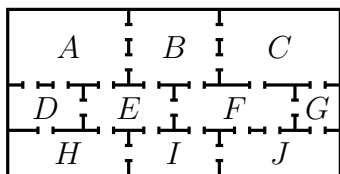


Konzultáció

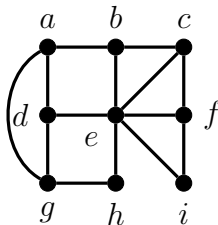
BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 2

2025.

1. A 39-csúcú F fában a csúcsok fokszámai csak két különböző értéket vesznek fel, minden fokszám vagy d_1 vagy d_2 . Izomorfia erejéig határozzuk meg az összes ilyen fát.
2. Az ábrán egy királyi palota alaprajza látható. A király minden reggel az A jelű lakosztályából sétára indul a palotában. A fejébe veszi, hogy séta közben minden ajtón pontosan egyszer szeretne átmenni. Ha ez sikerülne neki, a séta végpontját jelölné ki trónteremnek. De mivel sosem sikerül, az udvari bölcs azt tanácsolja, hogy falazzassa be az egyik ajtót. Van-e a palotában olyan ajtó, aminek a befalazása után már létezik a király vágyainak megfelelő séta? Ha igen, melyik szobából lehet a trónterem? (Az ábra a befalazás előtti állapotot mutatja.)



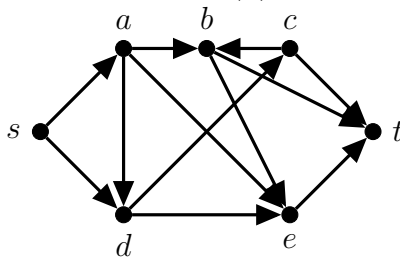
3. Van-e az ábrán látható G gráfnak olyan Hamilton-köre, ami nem tartalmazza az ab élt?



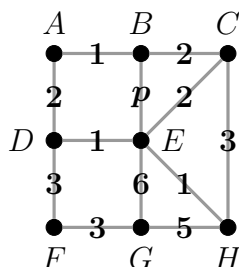
4. A 100-csúcú G egyszerű gráfbn minden csúcs foka legalább 51. Bizonyítsuk be, hogy bármely 98 csúcshoz van olyan kör, amely azokat tartalmazza, de a kimaradt 2 csúcst nem.
5. Valaki a BFS algoritmust futtatta az alábbi gráfon és leírta, hogy az eljárás milyen sorrendben járta be a csúcsokat. Azonban a leírt sorozatban négy betű olvashatatlanná vált, ezeket $\square$ -ek helyettesítik. Döntsük el az alábbiakról, hogy lehet-e a megmaradt, hiányos sorozat. Ahol a válasz igen, ott egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát.

(a) $S, \square, D, C, \square, \square, \square$

(b) $S, \square, D, E, \square, \square, \square$



6. A p pozitív valós paraméter minden értékére határozzunk meg egy minimális összsúlyú feszítőfát az alábbi gráfbn.



7. Az n -csúcsú ($n \geq 3$) teljes gráf élein pozitív súlyok vannak úgy, hogy minden Hamilton-út egy minimális összsúlyú feszítőfa. Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden feszítőfa minimális összsúlyú feszítőfa.
8. Legyenek egy egyszerű gráf csúcsai az egész számok 1-től 20-ig, két különböző csúcs között vezessen él pontosan akkor, ha a megfelelő számok szorzata osztható 10-zel. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.
9. A G gráfról annyit tudunk, hogy pontosan két páratlan kör van benne és mindkettő tartalmazza a v csúcsot.
 - (a) Előfordulhat-e, hogy G kromatikus száma 2?
 - (b) Előfordulhat-e, hogy G kromatikus száma 3?
 - (c) Előfordulhat-e, hogy G kromatikus száma 4?
10. Legyen G egy olyan intervallumgráf, amely tartalmaz 2013-csúcsú kört. Igaz-e feltétlenül, hogy G tartalmaz 3-csúcsú kört?
11. Legyenek G csúcsai $v_{i,j}$, ahol $1 \leq i, j \leq 3$ tetszőleges egész számok. (Tehát G -nek 9 csúcsa van.) Tetszőleges $i, j, k, \ell \in \{1, 2, 3\}$ esetén a $v_{i,j}$ és $v_{k,\ell}$ csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha $|i - k| + |j - \ell| = 1$. Határozzuk meg az $\alpha(G)$, $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ értékeket.
12. Adott egy 10-csúcsú és 20-élű, egyszerű, páros gráf. Bizonyítsuk be, hogy $\nu(G) \geq 3$.
13. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_6\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_7\}$. Minden $1 \leq i \leq 6$ és $1 \leq j \leq 7$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j -vel, ha az alábbi mátrix i -edik sorának és j -edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G -ben egy-egy maximális független, valamint minimális lefoglaló pont- és élhalmazt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Egy zenés-táncos mulatságon fiú-lány párok táncolnak és az utolsó szám előtt az teljesül, hogy minden fiú legalább 60 percet, minden lány pedig legfeljebb egy órát táncolt összesen. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas partnerválasztással elérhető, hogy az utolsó szám alatt minden fiú olyan lánnyal táncoljon, akivel már korábban is táncolt a mulatságon.
15. A (14-csúcsú és 21-élű) G gráf egy hétszög-alapú hasáb élhálójá; vagyis G csúcsai azonosak a hasáb csúcsaival és két csúcs akkor szomszédos G -ben (egyetlen él mentén), ha a hasáb egyik éle összeköti őket. Határozzuk meg G -nek az élkromatikus számát.
16. (a) Határozzuk meg az alábbi hálózatban az $\{s, d\}$ vágás kapacitását.
 (b) Igaz-e, hogy $\{s, d\}$ egy minimális kapacitású st -vágás ebben a hálózatban?

