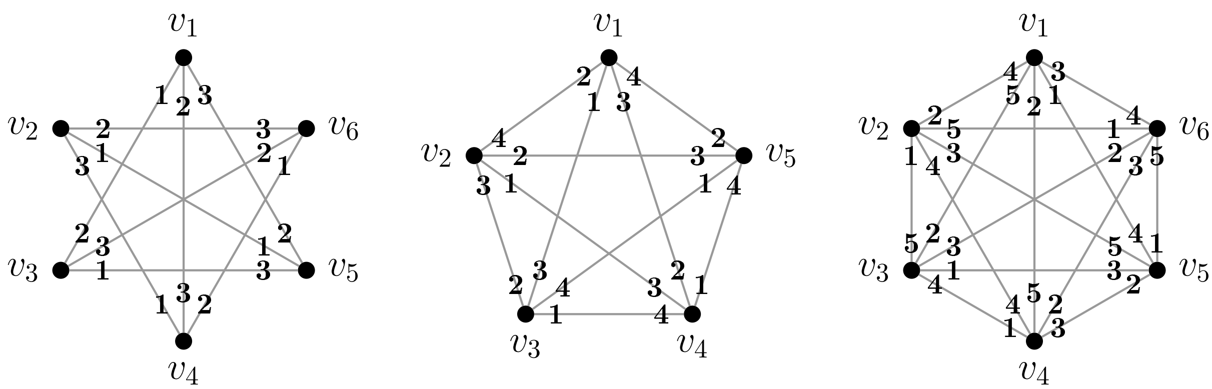
Stabil párosítások nem csak páros gráfokban, Irwing-algoritmus

Gráfok és algoritmusok
2020.
4. gyakorlat

1. Határozzunk meg az alábbi gráfokban egy-egy stabil párosítást (illetve stabil félpárosítást) az Irving-algoritmus segítségével.



2. Mutassunk olyan $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotációt, ahol
$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap \{f_1, f_2, \ldots, f_k\} = \emptyset$$
és $e_1, e_2, \ldots, e_k$ nem párosítás.

3. Bizonyítsuk be, hogy G bármely két stabil párosítása ugyanazt a ponthalmazt fedi.

4. Tegyük fel, hogy $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ és bármely csúcs számára egy él annál jobb, minél kisebb sorszámú a másik végpontja. Igazoljuk, hogy G-nek van stabil párosítása.

5. (a) Tegyük fel, hogy a G gráf csúcsaihoz úgy vannak megadva a $\leq_v$ lineáris élpreferenciák, hogy ha $e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$ a G egy páratlan hosszúságú C preferenciaköre, akkor G-nek van olyan $f = v_i v_j$ éle $(1 \leq i < j \leq k)$, amelyet mindkét végpontja preferál a C-beli élekkel szemben, azaz $f <_{v_i} e_i, e_{i+1}$ és $f <_{v_j} e_j, e_{j+1}$. Igazoljuk, hogy ebben az esetben G-nek van stabil párosítása.

   (b) Tegyük fel, hogy a fenti feltétel a páros hosszúságú preferenciakörökre is teljesül a G gráfban. Bizonyítsuk be, hogy G-nek pontosan egy stabil párosítása van.