Maximális párosítások, Edmonds–Gallai-felbontás

Gráfok és algoritmusok

2. gyakorlat

2025.

Berge–Tutte-formula. Tetszőleges véges $G = (V, E)$ gráfra

$$\nu(G) = \min \left\{ \frac{1}{2} \cdot \big(|V| - o(G - X) + |X|\big) : X \subset V \right\}.$$

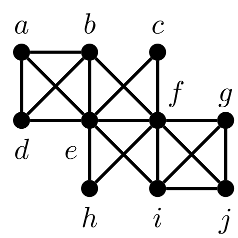
Tutte-tétel. A G gráfnak pontosan akkor van teljes párosítása, ha $o(G-X) \leq |X|$ teljesül minden $X \subseteq V(G)$ ponthalmazra.

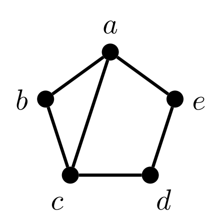
Állítás. Az Edmonds-algoritmus futása során mindig igaz, hogy tetszőleges külső csúcsnak megfelelő ponthalmaz G-ben faktor-kritikus gráfot feszít.

Definíció. A $G = (V, E)$ véges gráf esetén $D(G) = \big\{v \in V : \nu(G) = \nu(G-v)\big\}$ a maximális párosítás által elkerülhető pontok halmaza, $A(G) = N\big(D(G)\big) \setminus D(G)$ az előbbi pontokkal szomszédos további csúcsok, $C(G) = V \setminus \big(D(G) \cup A(G)\big)$ a maradék pontok halmaza.

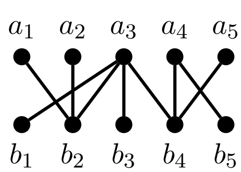
Edmonds–Gallai-struktúratétel. Tetszőleges $G = (V, E)$ véges gráfra az $X = A(G)$ választás optimális a Berge–Tutte-formulában. A $G - A(G)$ gráf páratlan komponenseit a $D(G)$-beli, a páros komponenseket pedig a $C(G)$-beli csúcsok alkotják.

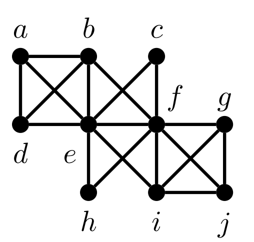
1. Használjuk Tutte tételét annak igazolására, hogy az alábbi gráfban nincs teljes párosítás.

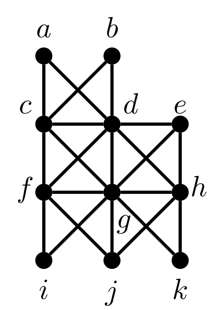




2. Legyen G egy olyan páros csúcsú, k-szorosan összefüggő gráf, melynek nincs $K_{1,k+1}$-gyel izomorf feszített részgráfja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G-ben van teljes párosítás.
3. Határozzuk meg az alábbi gráfok Edmonds–Gallai-felbontását.







4. Hogy néz ki az Edmonds–Gallai-felbontása a G gráfnak, ha
   (a) G-nek van teljes párosítása;
   (b) G faktor-kritikus?
5. Mutassuk meg, hogy ha G egy faktor-kritikus gráf, akkor az Edmonds-algoritmusban kapott végső alternáló erdő egyetlen csúcs.
6. Tegyük fel, hogy $\nu(G - v) = \nu(G)$ teljesül a G összefüggő gráf minden v csúcsára. Igazoljuk, hogy G faktor-kritikus.

7. Tegyük fel, hogy a G gráf minden $u \neq v$ csúcsához létezik G-nek olyan M_u maximális párosítása, ami nem fedi u-t. Bizonyítsuk be, hogy ha $G - v$ összefüggő, akkor G-nek olyan M_v maximális párosítása is van, ami v-t nem fedi.
8. Tegyük fel, hogy a 999-csúcsú G gráf v csúcsa G minden más csúcsával össze van kötve, továbbá, hogy G-nek van olyan maximális méretű párosítása, ami nem fedi v-t. Legyen u a G egy v-től különböző csúcsa. Határozzuk meg $\nu(G - u)$-t, azaz a $G - u$ gráf maximális párosításának méretét.
9. Tegyük fel, hogy a 101-csúcsú, összefüggő G gráf minden e éle esetén a G maximális méretű párosításai között van olyan, ami e-t tartalmazza, és található olyan is, ami nem tartalmazza e-t. Igazoljuk, hogy az Edmonds–Gallai-felbontásban szereplő $A(G)$ egy független ponthalmaz és $C(G) = \emptyset$.
10. Igazoljuk, hogy minden faktor-kritikus gráf előállítható egy csúcsból kiindulva az alábbi lépésekkel:
    (1) él hozzáadása,
    (2) egy csúcs páratlan körré történő felfújása. (Ha a G gráf egy páratlan körének összehúzásával kapjuk a G' gráfot, akkor azt mondjuk, hogy G a G'-ből egy csúcs páratlan körré történő felfújásával keletkezik.)
11. Ha a G gráf két (esetleg azonos) csúcsát összekötjük egy olyan úttal, aminek a belső csúcsai G-ben eddig nem szerepeltek, akkor azt mondjuk, hogy G-re egy fület ragasztottunk. A G gráfnak akkor van fülfelbontása, ha G megkapható egyetlen csúcsból fülek egymás utáni felragasztásával. Páratlan fülfelbontás alatt olyan fülfelbontást értünk, amiben minden fül páratlan élszámú. Bizonyítsuk be, hogy G-nek akkor és csak akkor van páratlan fülfelbontása, ha faktor-kritikus.
12. Egy gráfot minimálisan faktor-kritikusnak nevezünk, ha faktor-kritikus, de bármely élét elhagyva már nem az.
    (a) Bizonyítsuk be, hogy minden minimálisan faktor-kritikus gráfnak van másodfokú csúcsa.
    (b) Bizonyítsuk be, hogy minden n-csúcsú, minimálisan faktor-kritikus gráfnak legfeljebb $\frac{3}{2}(n-1)$ éle van, és ez a felső korlát éles.