Stabil párosítások, Gale–Shapley-algoritmus

Gráfok és algoritmusok

3. gyakorlat

2025.

Definíció.

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, melynek minden csúcsára adott egy $\preceq_v$ lineáris rendezés a v-re illeszkedő csúcsok halmazán.

Azt mondjuk, hogy az M élhalmaz *dominálja* az e élt, ha van olyan $m \in M$ él és $v \in V$ csúcs, amire $m \prec_v e$ teljesül. Az M párosítást az e él *blokkolja*, ha $e \notin M$ és M nem dominálja e-t.

Az M élhalmaz *stabil párosítás*, ha M pontosan az $(E - M)$-beli éleket dominálja.

Éltörlési lemma.

Ha $e = uv$ a $\preceq_u$ szerinti legjobb él, és $e \prec_v f$ teljesül valamely f élre, akkor G stabil párosításainak halmaza megegyezik $G - f$ stabil párosításainak halmazával.

Állítás.

(1) A lánykérő algoritmus kimenete fiú-optimális, azaz minden fiú a számára bármilyen stabil párosításban elérhető legjobb feleséget kapja, valamint lány-pesszimális, azaz minden lány csúcsnak a számára bármilyen stabil párosításban elérhető legrosszabb férj jut.

(2) Ha M_1 és M_2 stabil párosítások a G páros gráfban, akkor az $M_1 \triangle M_2$ szimmetrikus különbség minden komponense alternáló preferenciakör.

(3) Bármely két stabil párosítás ugyanazokat a csúcsokat fedi.

(4) Ha M_1 és M_2 stabil párosítások a G páros gráfban, és minden fiú csúcs az $M_1 \cup M_2$ halmazból a számára jobb élt választja, akkor olyan $M_1 \vee M_2$ stabil párosítást kapunk, amelyben minden lány csúcs az $M_1 \cup M_2$ halmazból a számára rosszabb élt kapja. Ha a lányok választják a számukra jobb élt, akkor olyan $M_1 \wedge M_2$ stabil párosítás adódik, amelyben minden fiú csúcs az $M_1 \cup M_2$ halmazból a számára rosszabb élt kapja.

1. Határozzunk meg az alábbi páros gráfokban egy-egy stabil párosítást a Gale–Shapley-algoritmus segítségével. A táblázatok sorai a fiúknak, az oszlopai a lányoknak felelnek meg, és a mezőkben szereplő első számok a fiúk preferenciáit, a második számok pedig a lányok preferenciáit jelentik.

	l_1	l_2	l_3	l_4
f_1	2./2.	3./2.	1./4.	–
f_2	–	1./3.	–	–
f_3	3./4.	2./1.	–	1./1.
f_4	–	1./4.	2./2.	3./3.
f_5	2./1.	–	1./3.	–
f_6	2./3.	–	3./1.	1./2.

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
f_1	2./3.	1./2.	–	–	3./1.
f_2	–	3./1.	–	1./3.	2./2.
f_3	–	1./3.	2./2.	3./1.	–
f_4	2./2.	–	–	1./2.	–
f_5	3./1.	–	2./1.	–	1./3.

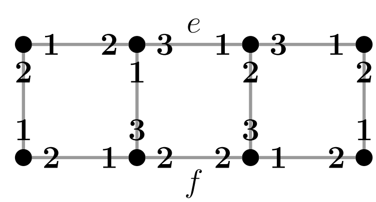
2. Adjunk gyors módszert annak eldöntésére, hogy egy páros gráfban van-e két különböző stabil párosítás, és ha van, akkor a módszer találjon is meg két különbözőt.

3. Tegyük fel, hogy a G páros gráfnak $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ az egyik színosztálya, továbbá ha tetszőleges $b \in B$ csúcsra $ba_i \prec_b ba_j$ teljesül, akkor $i < j$. Bizonyítsuk be, hogy G-nek pontosan egy stabil párosítása van.

4. Tegyük fel, hogy a G (nem feltétlenül páros) gráf minden csúcsához (lényegében) ugyanaz a preferenciasorrend tartozik, azaz G csúcsai sorba rendezhetők $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ módon úgy, hogy tetszőleges v csúcs és $i < j$ esetén $vv_i \prec_v vv_j$ teljesül (feltéve, hogy $vv_i, vv_j \in E(G)$). Igaz-e, hogy G-nek bizonyosan van stabil párosítása? Ha igen, akkor lehet-e több is? Hogyan lehet gyorsan találni egyet, ha van?

5. Tegyük fel, hogy a G (nem feltétlenül páros) gráfnak v egy olyan csúcsa, hogy G minden uv élére az uv él az u csúcs legrosszabb választása. Bizonyítsuk be, hogy ha uv egy M stabil párosítás éle, akkor az uv él a G minden stabil párosításában szerepel.

6. Változik-e attól a stabil párosítások száma, ha az ábrán látható gráfból töröljük
   (a) az e, illetve
   (b) az f élt?



7. Jelölje a véges (de nem feltétlenül páros) G gráf minden $e = uv$ éle esetén $v(e)$ azt, hogy az e él hányadik a $\prec_v$ preferenciarendezésben, és legyen $r(e) = u(e) + v(e)$. Tegyük fel, hogy $r(e) = 42$ teljesül G bármely e élére.
   (a) Határozzuk meg G csúcsainak fokszámát.
   (b) Bizonyítsuk be, hogy G-nek van stabil párosítása.
   (c) Bizonyítsuk be, hogy ha G egy páros gráf, akkor G minden élét tartalmazza egy stabil párosítás.

8. Tegyük fel, hogy a G (nem feltétlenül páros) gráf minden élét tartalmazza a G egy stabil párosítása. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ha M a G egy stabil párosítása, akkor M stabil marad akkor is, ha minden csúcs megfordítja preferenciarendezését: minél jobbnak gondolt egy élt korábban, annál rosszabbnak tekinti ezután.

9. Tegyük fel, hogy a G páros gráf osztályait fiúk és lányok alkotják, továbbá, hogy a házasságokat leíró M párosításnak k-val több éle van, mint a G egy M' stabil párosításának. Mutassuk meg, hogy legalább k olyan férj van, aki talál olyan házas asszonyt, akivel egymást kölcsönösen jobban kedvelik a házastársuknál.

10. Tegyük fel, hogy a G (nem feltétlenül páros) gráfból az éltörlési lemma szerint éleket törölve az e él is előbb-utóbb törlésre kerül. Igaz-e, hogy a G gráf stabil párosításainak halmaza megegyezik a $G - e$ gráf stabil párosításainak halmazával?

11. Tegyük fel, hogy M_1, M_2 és M_3 a G (nem feltétlenül páros) gráf három stabil párosítása. Minden, a párosítások által fedett v csúcsra jelölje $e(v)$ a v-re illeszkedő három párosításél közül a középsőt. (Ha egy v-re illeszkedő e él két párosításban is szerepel, akkor $e(v) = e$.) Mutassuk meg, hogy az így definiált $e(v)$ élek halmaza stabil párosítást alkot a G gráfban.