Stabil párosítások alkalmazásai

Gráfok és algoritmusok

4. gyakorlat

2025.

Tétel.

Legyenek $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások egy G páros gráfban és legyen $i \in \{1, \ldots, k\}$. Ha minden fiú e párosításokból multiplicitással számítva az i-edik legjobb élt választja, akkor egy olyan stabil párosítást kapunk, amiben minden lány a $(k+1-i)$-edik legjobb élt kapja.

Pym tétele.

Egy $D = (V, A)$ digráfban adottak a páronként pontdiszjunkt irányított utakból álló $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ halmazok. Ekkor létezik olyan $\mathcal{R}$ páronként pontdiszjunkt irányított utakból álló halmaz, amelyre

(1) $\mathrm{start}(\mathcal{P}) \subseteq \mathrm{start}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{start}(\mathcal{P}) \cup \mathrm{start}(\mathcal{Q})$,

(2) $\mathrm{ter}(\mathcal{Q}) \subseteq \mathrm{ter}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{ter}(\mathcal{P}) \cup \mathrm{ter}(\mathcal{Q})$,

(3) minden $\mathcal{R}$-beli út egy $\mathcal{P}$-beli út (esetleg üres) kezdőszeletének és egy $\mathcal{Q}$-beli út (esetleg üres) végszeletének az egymásutánja,

ahol $\mathrm{start}(\mathcal{X})$ és $\mathrm{ter}(\mathcal{X})$ az $\mathcal{X}$ úthalmaz kezdő-, illetve végpontjainak halmazát jelöli.

Definíció.

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $L_e \subseteq \mathbb{N}$ egy színlista minden $e \in E$ élhez. A G gráfot *L-élszínezhetőnek nevezzük*, ha van olyan helyes élszínezése, ahol minden $e \in E$ él színe egy L_e-beli szín.

A G gráfot *k-él-listaszínezhetőnek* nevezzük, ha az L-élszínezhető minden olyan esetben, amikor $|L(e)| \geq k$ teljesül minden e élre.

Azt mondjuk, hogy a G gráf *él-listaszínezési száma* $\chi'_l(G) = k$, ha G k-él-listaszínezhető, de nem $(k-1)$-él-listaszínezhető.

Megfigyelés.

Tetszőleges G gráf esetén $\chi'(G) \leq \chi'_l(G)$.

Listaszínezési sejtés.

Tetszőleges G véges gráf esetén $\chi'(G) = \chi'_l(G)$.

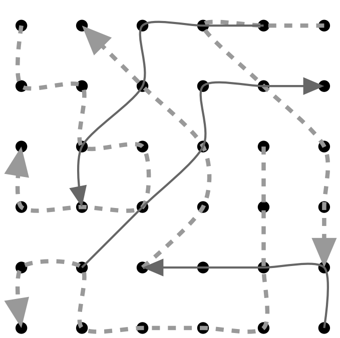
Galvin tétele.

Ha G páros gráf, akkor $\chi'_l(G) = \Delta(G)$.

Galvin tételének általánosítása.

Legyen $G = (V, E)$ egy k-élszínezhető gráf, és legyen minden élhez adott egy olyan legalább k-hosszú színlista, hogy bármely szín esetén az adott színnel színezhető élek halmaza nem tartalmaz páratlan kört. Ekkor a G gráf él-listaszínezhető a megadott színlistákról.

1. Tekintsük az alábbi irányított utakat. Jelölje $\mathcal{P}$ a szaggatott vonallal jelölt utak, $\mathcal{Q}$ pedig a folytonos vonallal jelölt utak halmazát. Keressük meg a Pym-tételben szereplő $\mathcal{R}$ halmazt a tétel bizonyítása alapján.



2. Tegyük fel, hogy a D irányított gráf páronként pontdiszjunkt irányított útjai alkotják a $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ úthalmazokat. Igazoljuk, hogy található D csúcsainak olyan U részhalmaza, amelyre igaz, hogy $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ egyetlen útja sem tartalmaz két U-beli csúcsot, továbbá D minden U-n kívüli v csúcsához létezik olyan $u \in U$ csúcs és $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$-beli P út, amelyen u megelőzi v-t.

3. Határozzuk meg tetszőleges $n \geq 3$ esetén az n-hosszú kör él-listaszínezési számát.

4. Határozzuk meg az alábbi páros gráf egy él-listaszínezését az alábbi színlistákról Galvin tételének bizonyítása alapján. (A listákban szereplő színek: piros, kék, zöld, sárga, lila, narancssárga, barna.)

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
f_1	–	–	{P,K,Z,B}	–	{P,K,Z,N}
f_2	{P,K,Z,N}	–	{Z,S,L,B}	{P,S,N,B}	–
f_3	–	{K,S,L,N}	{P,L,N,B}	–	{K,Z,S,B}
f_4	{P,K,L,N}	–	{P,S,L,B}	–	–
f_5	–	{P,S,N,B}	–	{K,S,L,B}	–

5. Tegyük fel, hogy adott a $K_{4,3}$ teljes páros gráfnak 8 darab feszítőfája azzal a tulajdonsággal, hogy a gráf bármely élét pontosan 4 darab feszítőfa tartalmazza. Igazoljuk, hogy kiválasztható minden feszítőfának egy-egy (esetleg üres) párosítása úgy, hogy $K_{4,3}$ minden éle szerepeljen valamelyik kiválasztott párosításban.

6. Tegyük fel, hogy a G páros gráf minden egyes e éléhez adott egy legalább $k \cdot \Delta(G)$ színből álló L_e színlista. Igazoljuk, hogy minden e élhez választható k db szín az L_e színlistából úgy, hogy a közös csúccsal rendelkező élekhez csupa különböző színt válasszunk.

7. Tegyük fel, hogy a G páros gráf minden egyes e éléhez adott egy $k(e)$ pozitív egész érték és egy legalább K színből álló L_e színlista, ahol $K = \max_{v \in V(G)} \sum_{e \in E(v)} k(e)$. Igazoljuk, hogy minden e élhez választható $k(e)$ darab szín az L_e színlistából úgy, hogy a közös csúccsal rendelkező élekhez csupa különböző színt válasszunk.

8. Az él-listaszínezési számhoz hasonlóan definiálhatjuk a (csúcs-)listaszínezési számot is. Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $L_v \subseteq \mathbb{N}$ egy színlista minden $v \in V$ csúcshoz. A G gráfot L-színezhetőnek nevezzük, ha van olyan helyes színezése, ahol minden $v \in V$ csúcs színe egy L_v-beli szín. A G gráfot *k-listaszínezhetőnek* nevezzük, ha az L-színezhető minden olyan esetben, amikor $|L(v)| \geq k$ teljesül minden v csúcsra. Azt mondjuk, hogy a G gráf *listaszínezési száma* $\chi_l(G) = k$, ha G k-listaszínezhető, de nem $(k-1)$-listaszínezhető.

   (a) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf esetén $\chi(G) \leq \chi_l(G) \leq \Delta(G) + 1$ teljesül.

   (b) Határozzuk meg a $K_{2,4}$ gráf listaszínezési számát.

   (c) Legyen T egy legalább 2-csúcsú fa. Mutassuk meg, hogy $\chi_l(G) = 2$.

   (d) Határozzuk meg tetszőleges $n \geq 3$ esetén az n-hosszú kör listaszínezési számát.

9. Tegyük fel, hogy $M_1, M_2, \ldots, M_{2k+1}$ a G (nem feltétlenül páros) gráf stabil párosításai. Minden, a párosítások által fedett v csúcsra jelölje $e(v)$ a v-re illeszkedő (multiplicitással) $2k+1$ párosításél közül a $(k+1)$-edik legjobbat. Mutassuk meg, hogy az így definiált $e(v)$ élek halmaza stabil párosítást alkot a G gráfban.