Irving-algoritmus

Gráfok és algoritmusok

5. gyakorlat

2025.

Rotáció.

Adott egy $G = (V, E)$ gráf és minden $v \in V$ csúcsához egy $\prec_v$ lineáris rendezés a v-re illeszkedő élek halmazán. Egy $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt élsorozatot *rotációnak* nevezünk, ha ezen fordított sorrendben végighaladva minden $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ esetén f_i a második, e_i pedig az utolsó éle annak a csúcsnak, amelyikből rálépünk.

Rotáció eliminálása.

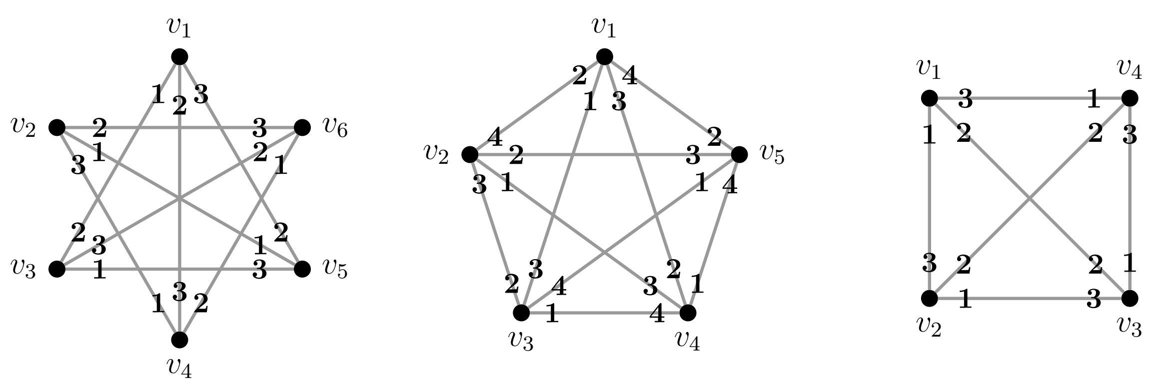
Egy $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció *eliminációján* az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek törlését értjük.

Eliminálható és nemeliminálható rotáció.

Adott egy $G = (V, E)$ gráf és minden $v \in V$ csúcsához egy $\prec_v$ lineáris rendezés a v-re illeszkedő élek halmazán. Tegyük fel, hogy G minden $e = uv \in E$ élére teljesül, hogy e pontosan akkor legjobb $\prec_u$ szerint, ha legrosszabb $\prec_v$ szerint, és legyen $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ egy rotáció G-ben.

- Ha $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap \{f_1, f_2, \ldots, f_k\} = \emptyset$, akkor *eliminálható rotációról* beszélünk.
- Ha $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ és $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ egy páratlan preferenciakör, akkor *nemeliminálható rotációról* beszélünk.

1. Határozzunk meg az alábbi gráfokban egy-egy stabil párosítást (illetve stabil félpárosítást) az Irving-algoritmus segítségével.



2. Mutassunk olyan gráfot, amely tartalmaz páratlan preferenciakört, és mégis van stabil párosítása.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban nem található páratlan preferenciakör, akkor a gráfnak van stabil párosítása.

4. Tegyük fel, hogy a G gráf éleit úgy színeztük ki az $1, 2, \ldots, k$ színekkel, hogy G azonos színű éleinek nincs közös csúcsa. Tegyük fel továbbá, hogy a G csúcsaihoz tartozó preferenciák olyanok, hogy ha $c(e) < c(f)$ teljesül egy v csúcsból induló e és f él színeire, akkor $e \prec_v f$, azaz v számára az e él jobb, mint az f él. Bizonyítsuk be, hogy G-nek pontosan egy stabil párosítása van.

5. Tegyük fel, hogy a G gráf csúcsait úgy színeztük ki az $1, 2, \ldots, k$ színekkel, hogy G minden éle különböző színű csúcsokat köt össze. Tegyük fel továbbá, hogy a G csúcsaihoz tartozó preferenciák olyanok, hogy ha $uv, uw \in E(G)$ és $c(v) < c(w)$, akkor $uv \prec_u uw$, azaz u számára az uv él jobb, mint az uw él. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van stabil párosítása.

6. Legyen G egy olyan gráf, aminek minden csúcsa vagy piros vagy zöld úgy, hogy G minden páratlan köre tartalmaz piros és zöld csúcsot is. Legyen adott G minden v csúcsához egy olyan $\prec_v$ lineáris rendezés a v-re illeszkedő élek halmazán, amiben
   (a) minden piros csúcsba futó él megelőz minden zöld csúcsba vezető élt;
   (b) minden v-vel azonos színű csúcsba futó él megelőz minden v-étől különböző színű csúcsba vezető élt.

   Bizonyítsuk be, hogy G-nek (mindkét esetben) van stabil párosítása.

7. Legyen G egy olyan gráf, aminek minden éle vagy piros vagy zöld úgy, hogy G minden páratlan köre tartalmaz piros és zöld élt is. Legyenek a G csúcsaihoz tartozó preferenciák olyanok, hogy abban minden piros él megelőz minden zöld élt. Mutassuk meg, hogy G-nek van stabil párosítása.

8. Legyen G egy olyan gráf, aminek minden csúcsa és minden éle vagy piros vagy zöld úgy, hogy G minden páratlan köre tartalmaz piros és zöld élt is. Legyenek a G csúcsaihoz tartozó preferenciák olyanok, hogy abban minden csúcs jobban preferálja a vele azonos színű csúcsba futó éleket, és a vele azonos színű csúcsba futó élek közül is jobban preferálja a vele megegyező színű éleket. Mutassuk meg, hogy G-nek van stabil párosítása.

9. (a) Tegyük fel, hogy a G gráf csúcsaihoz úgy vannak megadva a $\prec_v$ lineáris élpreferenciák, hogy ha $e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$ a G egy páratlan hosszúságú C preferenciaköre, akkor G-nek van olyan $f = v_i v_j$ éle $(1 \leq i < j \leq k)$, amelyet mindkét végpontja preferál a C-beli élekkel szemben, azaz $f \prec_{v_i} e_i, e_{i+1}$ és $f \prec_{v_j} e_j, e_{j+1}$. Igazoljuk, hogy ebben az esetben G-nek van stabil párosítása.
   (b) Tegyük fel, hogy a fenti feltétel a páros hosszúságú preferenciakörökre is teljesül a G gráfban. Bizonyítsuk be, hogy G-nek pontosan egy stabil párosítása van.