Kombinatorik

Grundlagen der theoretischen Informatik

Übung 1

2021

Permutationen ohne Wiederholung.

Die Anzahl der Anordnungen von n verschiedenen Elementen ist

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0, \\ n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 & \text{falls } n > 0. \end{cases}$$

Permutationen mit Wiederholung.

Die Anzahl der Anordnungen von n Elementen, von denen jeweils $k_1, k_2, \ldots, k_l$ identisch sind (das heißt $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_l$), ist

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_l!}.$$

Variationen ohne Wiederholung.

Die Anzahl der Anordnungen von k verschiedenen Elementen, die aus n verschiedenen Elementen ausgewählt worden sind, ist

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Variationen mit Wiederholung.

Die Anzahl der Anordnungen von k Elementen, die aus n verschiedenen Elementen ausgewählt worden sind, wobei die Elemente mehrfach vorkommen dürfen, ist

$$n^k.$$

Kombinationen ohne Wiederholung.

Die Anzahl der Möglichkeiten, k verschiedene Elemente aus n verschiedenen Elementen ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen, ist

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Kombinationen mit Wiederholung.

Die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus n verschiedenen Elementen ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen, wobei die Elemente mehrfach vorkommen dürfen, ist

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Binomischer Lehrsatz.

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}^+$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus den Ziffern $0, 1, 3, 5, 8$
   (a) eine fünfstellige Zahl zu bilden, in der jede Ziffer genau einmal vorkommt;
   (b) eine sechsstellige Zahl zu bilden;
   (c) eine fünfstellige Zahl zu bilden, die durch 5 teilbar ist und in der jede Ziffer genau einmal vorkommt?
2. Auf wie viele Arten kann man einen Lottoschein ausfüllen, um einen Vierer im Lotto 6 aus 49 zu haben?
3. Auf wie viele Arten können 90 Lottoscheine unterschiedlich ausgefüllt werden, um bei einer bestimmten Ziehung im Lottospiel 5 aus 90 keine Richtigen zu haben?

4. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Ehepaare in einer Stuhlreihe zu platzieren, wenn alle Männer neben ihren Ehefrauen sitzen wollen? Wie lautet die Antwort, wenn die Reihe aus 13 Stühlen besteht?
5. Auf wie viele Arten können sich 10 Ehepaare zu 10 Tanzpaaren so formieren, dass genau 7 Herren mit ihrer Frau tanzen und alle Paare aus einer Frau und einem Mann bestehen?
6. Wie viele Möglichkeiten gibt es, in der folgenden Tabelle das Wort KOMBINATORIK zu lesen?

K	O	M	B	I	N
O	M	B	I	N	A
M	B	I		A	T
B	I	N	A	T	O
I	N	A	T	O	R
N	A	T	O	R	I
A	T	O	R	I	K

7. Auf wie viele Arten kann man die Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI im Kreis anordnen, wenn nur diejenigen Anordnungen als verschieden betrachtet werden, die durch keine Drehung aufeinander abgebildet werden können.
8. Ein Würfel wird zehnmal geworfen. Auf wie viele Arten kann die Augensumme durch 3 teilbar sein?
9. Wie viele fünfstellige Zahlen gibt es, die aus einer
   (a) streng monoton fallenden,
   (b) streng monoton steigenden,
   (c) monoton fallenden,
   (d) monoton steigenden

   Ziffernfolge bestehen?
10. Beweisen Sie, dass eine nichtleere, endliche Menge immer gleich viele Teilmengen mit gerader Kardinalität wie mit ungerader besitzt!
11. Beweisen Sie die folgenden Identitäten.
   (a) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
   (b) $\binom{k}{k}\binom{n-k}{0} + \binom{k}{k-1}\binom{n-k}{1} + \binom{k}{k-2}\binom{n-k}{2} + \ldots + \binom{k}{0}\binom{n-k}{k} = \binom{n}{k}$
   (c) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$
   (d) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = 2^{n-1}n$
12. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 20 Personen unterschiedlicher Größe für ein Gruppenfoto in zwei gleichlangen Reihen aufzustellen, wenn die Person vorne jeweils kleiner sein soll als die hinter ihr stehende Person?
13. Wie viele Türme kann man höchstens auf einem 8×8 Schachbrett so platzieren, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen? Wie viele solcher Aufstellungen mit maximaler Anzahl von Türmen gibt es?

   (* Wie lauten die Antworten für Läufer?)
14. Auf wie viele Arten können 3 rote, 3 weiße, 4 grüne Bausteine und einige Plüschkarotten und Plüschbrokkolis an 10 Kindergartenkinder so ausgeteilt werden, dass jede Kinder genau einen Baustein und ein Plüschgemüse erhält? (Es gibt unbegrenzt viele Plüschkarotten und -brokkolis.)
15. Wie viele Anordnungen der Ziffern $1, \ldots, 9$ gibt es, wobei die ersten fünf Ziffern in aufsteigender und die letzten fünf in absteigender Reihenfolge stehen?