Planarität

Grundlagen der theoretischen Informatik

Übung 10

2021

Eulersche Polyedersatz

Sei G ein zusammenhängender, ebener Graph mit n Knoten, m Kanten und g Gebieten. Dann gilt $n - m + g = 2$.

Sei G ein ebener Graph mit n Knoten, m Kanten, g Gebieten und c Komponenten. Dann gilt $n - m + g = c + 1$.

Satz.

Ist G ein einfacher, planarer Graph mit mindenstens 3 Knoten, so gilt $m \leq 3n - 6$; und wenn G keine Dreiecke enthält, gilt sogar $m \leq 2n - 4$.

Satz von Kuratowski.

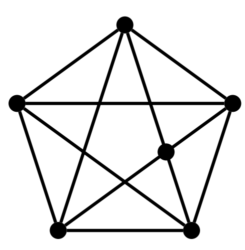
Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält.

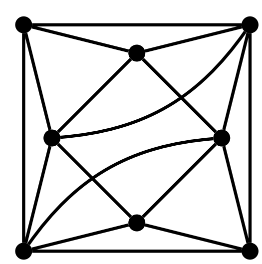
1. Sei G ein ebener Graph (d. h., ein planarer Graph mit einer konkreten, kreuzungsfreien Darstellung in der Ebene gegeben), dessen Gebiete (einschließlich des äußeren Gebiets) jeweils durch 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5 Kanten begrenzt sind. Bestimmen Sie die Knotenzahl von G.

2. Sei G ein ebener Graph mit 20 Knoten, dessen jedes Gebiet (einschließlich des äußeren Gebiets) durch mindestens 5 Kanten begrenzt ist. Bestimmen Sie die maximale Anzahl der Gebiete von G.

3. Welche der folgenden Graphen sind planar?

   K_6, $K_{4,2}$, $K_{4,3}$, $K_5 - e$ (d. h. eine beliebige Kante e wurde aus dem Graphen K_5 entfernt), $K_{3,3} - e$, $\overline{C_7}$ (das Komplement des Kreises der Länge 7)





4. Sei G ein einfacher Graph, der drei kantendisjunkte Spannbäume enthält. Beweisen Sie, dass G eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält.

5. Sei G ein einfacher Graph, dessen Maximalgrad höchstens 3 ist und dessen jeder Kreis eine Länge von höchstens 5 hat. Beweisen Sie, dass G planar ist.

6. Gegeben ist der folgende Graph G. Bestimmen Sie die maximale Anzahl von Kanten, die zu G so hinzugefügt werden können, dass ein einfacher, planarer Graph entsteht.