

Grundbegriffe der Graphentheorie
GRUNDLAGEN DER THEORETISCHEN INFORMATIK
Übung 2
2021

Handschlaglemma.

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt: $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, wobei $d(v)$ den Grad des Knotens v bezeichnet.

Handschlaglemma für gerichtete Graphen.

In jedem gerichteten Graphen ist die Summe der Eingangsgrade aller Knoten gleich der Summe der Ausgangsgrade aller Knoten.

Isomorphie.

Die Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ werden isomorph genannt, wenn die Knoten von G und die Knoten von G' mit den Zahlen $1, \dots, n$ so nummiert werden können, dass für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ die Anzahl der Kanten zwischen i und j in G und in G' dieselbe ist.

Wald.

Ein kreisfreier Graph heißt Wald.

Baum.

Ein zusammenhängender, kreisfreier Graph heißt Baum.

Blatt.

Ein Knoten mit Grad 1 in einem Baum heißt Blatt.

Satz.

Zwischen je zwei Knoten eines Baums gibt es genau einen Weg.

Satz.

In jedem Baum mit mindestens zwei Knoten gibt es mindestens zwei Blätter.

Satz.

Jeder Baum mit n Knoten hat $n - 1$ Kanten.

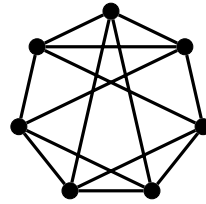
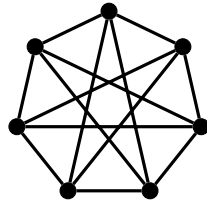
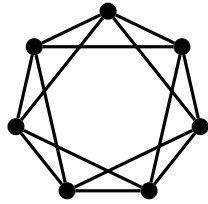
Jeder Wald mit n Knoten und c Komponenten hat $n - c$ Kanten.

Satz.

Ein Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn er einen Spannbaum enthält.

1. Wie viele einfache Graphen gibt es auf der Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$?
2. Sei G der Graph mit Knotenmenge $\{1, \dots, 10\}$, in dem zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn die Differenz der entsprechenden Zahlen ungerade ist. Wie viele Kreise der Länge 4 enthält der Graph G ?
3. Der Graph G hat $n + 2$ Knoten, von denen zwei Knoten rot und n Knoten grün sind. Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie unterschiedlich gefärbt sind. Wie viele Spann bäume enthält der Graph G ?
4. Gibt es einen einfachen Graphen mit Gradfolge
 - (a) 1, 2, 2, 3, 3, 3;
 - (b) 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4;
 - (c) 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7;
 - (d) 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6;
 - (e) 2, 2, 2, 4, 5, 5?
5. Bestimmen Sie alle Graphen mit einem Maximalgrad von höchstens 2.

6. Sei G ein ungerichteter Graph mit Knoten a, b, c, d, e, f, g, h , deren Grade jeweils 6, 4, 4, 2, 2, 2, 1, 1 sind. Bestimmen Sie den Wert x , für den die Kanten des Graphen so gerichtet werden können, dass die Ausgangsgrade der Knoten jeweils $x, 3, 1, 1, 2, 1, 0, 0$ sind.
7. Welche der folgenden Graphen sind isomorph?



8. Konstruieren Sie je einen selbstkomplementären Graphen mit 5 bzw. 6 Knoten.
9. Sei T ein Baum mit der Eigenschaft $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$. Bestimmen Sie die Anzahl der Kanten von T .
10. Die Gradfolge eines Baums besteht aus 2 verschiedenen Zahlen: die eine kommt 9-mal vor, die andere 92-mal. Bestimmen Sie die entsprechenden Grade.
11. Sei T ein Baum mit 333 Blättern. Beweisen Sie, dass es einen inneren Knoten gibt mit einem Grad von mindestens 5.
12. Sei T ein Baum, der, ausgenommen der Blätter, genau zwei Knoten mit Grad 8 und vier Knoten mit Grad 13 hat. Bestimmen Sie die Knotenzahl von T .
13. Beweisen Sie, dass das Hinzufügen einer Kante zu einem Baum genau einen Kreis erzeugt.
14. Sei G ein einfacher, zusammenhängender Graph mit 100 Knoten und 100 Kanten. Beweisen Sie, dass G mindestens drei verschiedene Spannbäume enthält. (Zwei Spannbäume sind identisch, wenn sie dieselbe Kantenmenge besitzen.)
15. Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten und mit Minimalgrad von mindestens $n/2$. Ist G zusammenhängend?
16. Sei G ein einfacher Graph mit 10 Knoten, von denen 9 Knoten einen Grad von 5 haben. Beweisen Sie, dass G zusammenhängend ist.
17. Sei G ein einfacher Graph mit 10 Knoten und mit Minimalgrad von mindestens 33. Beweisen Sie, dass durch Hinzufügen einer neuen Kante ein zusammenhängender Graph entstehen kann.
18. Sei G ein endlicher Graph. Beweisen Sie, dass es zu jedem Knoten v mit ungeradem Grad einen verschiedenen Knoten w mit auch ungeradem Grad gibt, sodass G einen Weg zwischen v und w enthält.
19. Sei G ein einfacher Graph mit Gradfolge 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Das Hinzufügen von vier beliebigen neuen Kanten zu dem Graphen G erzeugt immer einen Kreis.
20. Sei G ein einfacher Graph mit 22 Kanten, die entweder rot oder grün so gefärbt sind, dass sowohl die roten, als auch die grünen Kanten jeweils einen Spannb Baum bilden. Bestimmen Sie die Kantenzahl des Komplementgraphen \overline{G} .