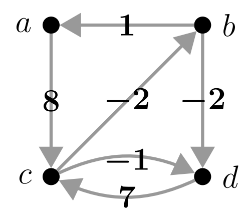
Kürzeste Wege, Tiefensuche

Grundlagen der theoretischen Informatik

Übung 5

2021

1. Bestimmen Sie in dem folgenden Graphen
   (a) mit Hilfe des Algorithmus von Bellman und Ford die kürzesten Wege von dem Knoten a zu allen anderen Knoten;
   (b) mit Hilfe des Algorithmus von Floyd die kürzesten Wege zwischen allen Paaren von Knoten.



   Ersetzen Sie das Gewicht der Kante dc durch 3 und führen Sie die Algorithmen wieder aus.

2. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $l : E \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Wenn P ein kürzester u-v-Weg bezüglich der Gewichtsfunktion l ist, dann ist P auch ein kürzester u-v-Weg bezüglich der Gewichtsfunktion l', wobei für jede Kante $e \in E$ gilt: $l'(e) = \big(l(e)\big)^2$.

3. Wir wollen Forint in verschiedene Währungen wechseln. Mit Hilfe unserer ausländischen Bekannten können wir einige Währungen in andere direkt wechseln. Wir haben einen gewichteten, gerichteten Graphen konstruiert, dessen Knoten den Währungen, dessen Kanten den direkten Möglichkeiten des Geldwechselns und dessen Kantengewichte den Wechselkursen von dem Anfangsknoten in den Endknoten entsprechen (d. h., das Gewicht einer gerichteten Kante uv ist der Preis einer Einheit der Währung u, ausgedrückt in der Währung v). Bestimmen Sie für jede Währung, wie viele wir davon höchstens für 1 Forint kaufen können.

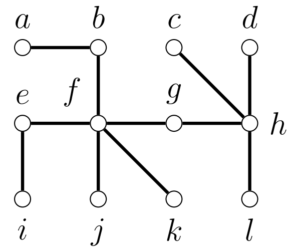
4. Gegeben sind die folgenden Adjazenzlisten der gerichteten Graphen G_1 und G_2.

   G_1: $\boldsymbol{a}$: b, c, d; $\boldsymbol{b}$: d; $\boldsymbol{c}$: d; $\boldsymbol{d}$: e; $\boldsymbol{e}$: a;
   G_2: $\boldsymbol{a}$: f, g; $\boldsymbol{b}$: a, g; $\boldsymbol{c}$: -; $\boldsymbol{d}$: -; $\boldsymbol{e}$: c, d; $\boldsymbol{f}$: e $\boldsymbol{g}$: e, f;

   (a) Überlegen Sie, ob diese Graphen azyklisch sind.
   (b) Falls ja, bestimmen Sie eine topologische Ordnung.

5. Beweisen Sie, dass jeder gerichtete Graph $G = (V, E)$ in zwei azyklische, gerichtete Graphen zerlegt werden kann, genauer gesagt, dass die Kantenmenge E eine Partition $\{E_1, E_2\}$ (d. h. $E = E_1 \cup E_2$ und $E_1 \cap E_2 = \emptyset$) so hat, dass die gerichteten Graphen $G_1 = (V, E_1)$ und $G_2 = (V, E_2)$ beide azyklisch sind.

6. Unten ist ein Tiefensuchbaum eines Graphen G dargestellt. Bestimmen Sie die Knoten, an denen die Tiefensuche beginnen konnte, vorausgesetzt, dass sowohl die Knoten b und c, als auch die Knoten a und e in dem Graphen G benachbart sind.



7. Überlegen Sie, ob jeder azyklische, gerichtete Graph genau eine topologische Ordnung hat.

8. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Wenn ein azyklischer, gerichteter Graph mit n Knoten einen gerichteten Weg mit $n-1$ Kanten enthält, hat der Graph genau eine topologische Ordnung.

9. Unten ist ein Spannbaum eines Graphen G dargestellt, der gleichzeitig der Breitensuchbaum mit dem Startknoten h und der Tiefensuchbaum mit dem Startknoten d von G ist. Bestimmen Sie die maximale Anzahl der Kanten von G.