Eulersche und hamiltonsche Kreise

Grundlagen der theoretischen Informatik

Übung 6

2021

Klassifikation einer Kante uv**.**

Baumkante	DFS-Nummer(v) $= *$
Vorwärtskante	DFS-Nummer(u) $<$ DFS-Nummer(v)
Rückwärtskante	DFS-Nummer(u) $>$ DFS-Nummer(v), DFS-End-Nummer(v) $= *$
Querkante	DFS-Nummer(u) $>$ DFS-Nummer(v), DFS-End-Nummer(v) $\neq *$

Satz.

Ein Graph hat genau dann einen eulerschen Kreis, wenn er bis auf isolierte Knoten zusammenhängend ist und jeder seiner Knoten geraden Grad hat.

Ein Graph hat genau dann einen eulerschen Weg, wenn er bis auf isolierte Knoten zusammenhängend ist und zwei oder keiner seiner Knoten von ungeradem Grad ist.

Satz.

Wenn es in einem Graphen eine Knotenmenge X gibt, nach deren Entfernen der Graph in mehr als $|X|$ Komponenten zerfällt, dann enthält der Graph keinen hamiltonschen Kreis.

Wenn es in einem Graphen eine Knotenmenge X gibt, nach deren Entfernen der Graph in mehr als $|X|+1$ Komponenten zerfällt, dann enthält der Graph keinen hamiltonschen Weg.

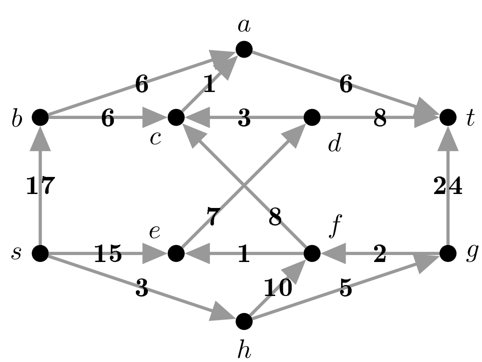
Satz von Dirac.

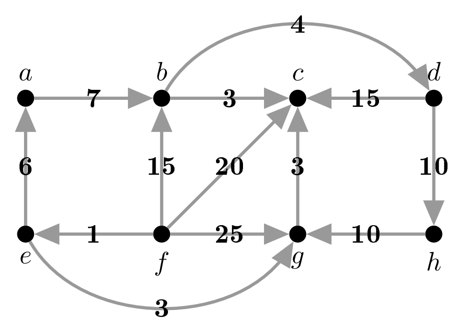
Sei G ein einfacher Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Wenn jeder Knoten von G einen Grad von mindestens $n/2$ hat, dann enthält G einen hamiltonschen Kreis.

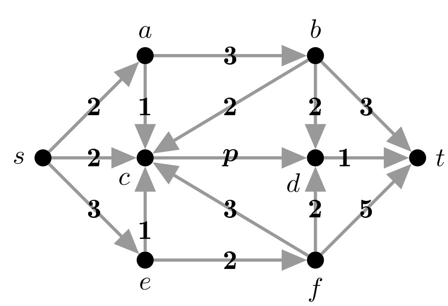
Satz von Ore.

Sei G ein einfacher Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Wenn die Summe des Grades je zweier nichtadjazenter Knoten mindestens n ist, dann enthält G einen hamiltonschen Kreis.

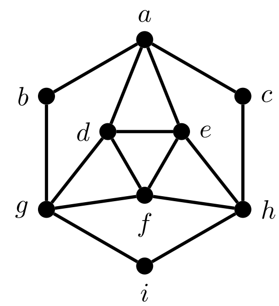
1. Bestimmen Sie die frühesten Endzeitpunkte der folgenden PERT-Netzpläne. Bestimmen Sie die kritischen Aktivitäten und bestimmenen Sie für die Projekte den spätesten Anfangszeitpunkt der Aktivität b, ohne das gesamte Projekt zu verzögern.







2. Entscheiden Sie, ob der folgende Graph einen eulerschen bzw. einen hamiltonschen Kreis enthält. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Kreis an.



3. Sei G ein einfacher Graph, der 33 rote, 777 weiße, 333 grüne und 77 gelbe Knoten hat. Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie unterschiedlich gefärbt sind. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Durch das Hinzufügen von einigen beliebigen neuen Kanten zu dem Graphen G kann ein einfacher Graph entstehen, der einen eulerschen Kreis hat.

4. Gibt es eine Springertour (d. h., eine Folge von Zügen des Springers, wobei jedes Feld genau einmal besucht wird) auf einem Schachbrett der Größe

   (a) 4×4, (b) 5×5, (c) 3×6.

5. Sei G_1 ein einfacher Graph mit 10 Knoten und der Gradfolge $3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 9, 9, 9$. Beweisen Sie, dass G_1 keinen hamiltonschen Kreis enthält.

6. Sei G der Sterngraph mit 101 Knoten (d. h., der Graph hat einen zentralen Knoten, der mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist, und der Graph hat keine weiteren Kanten). Bestimmen Sie die minimale Anzahl von Kanten, die zu G hinzugefügt werden müssen, um einen hamiltonschen Kreis zu erzeugen.

7. Sei G ein einfacher Graph mit 20 Knoten und mit einem Minimalgrad von mindestens 12. Beweisen Sie, dass G zwei kantendisjunkte hamiltonsche Kreise (d. h. zwei hamiltonsche Kreise, die keine gemeinsamen Kanten haben) enthält!

8. Sei G ein einfacher Graph mit $2k + 1$ Knoten und mit einem Minimalgrad von mindestens k. Beweisen Sie, dass G einen hamiltonschen Weg enthält!

9. Sei G ein einfacher, 9-regulärer Graph mit 16 Knoten. Beweisen Sie, dass 8 Kanten entfernt werden können, sodass der so erhaltene Graph einen eulerschen Kreis hat.

10. Sei G ein einfacher Graph mit 59 Knoten. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Wenn die Summe des Grades je zweier Knoten gerade und größer als 60 ist, dann hat G einen eulerschen Kreis.

11. Sei G ein Graph und F ein Spannbaum von G. Sei G' der Graph, der aus G durch Entfernen der Kanten von F entsteht. Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn G einen eulerschen Weg und G' einen eulerschen Kreis hat, dann enthält G einen hamiltonschen Weg.

12. Die Situation ist kritisch: Die Hauptstadt von Absurdistan steht unter der Gefahr einer Invasion von säurespeienden Wieseln. Unten ist das Straßennetzwerk der Hauptstadt dargestellt, wobei die zu den Straßenabschnitten gehörigen Zahlen die Länge des entsprechenden Straßenabschnitts bedeuten. Die Gefahr wird – wie immer – von dem wachhabenden Superheld, Uhrfederrückenspringer, beseitigt. Während der Ausführung seines Masterplans (wonach er aus einem Hubschrauber Basen spritzt, um die Eindringlinge zu neutralisieren) ist sein oberstes Ziel, das Staatsvermögen zu schützen. Deshalb will er nicht nur alle Straßenabschnitte besprühen und zum frei gewählten Startpunkt zurückkehren, sondern auch die Flugplan-Gesamtentfernung minimieren. Bestimmen Sie einen solchen Flugplan!