

Knotenfärbung

GRUNDLAGEN DER THEORETISCHEN INFORMATIK

Übung 7

2021

Knotenfärbung.

Eine (gültige/zulässige) Knotenfärbung eines Graphen ist eine Abbildung, die jedem Knoten eine Farbe so zuordnet, dass je zwei beliebige benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen.

Chromatische Zahl.

Die chromatische Zahl $\chi(G)$ eines Graphen G ist die minimale Anzahl von Farben, die für eine Knotenfärbung von G benötigt werden.

Clique.

Ein vollständiger Teilgraph eines Graphen heißt Clique. Die Anzahl der Knoten einer größten Clique in einem Graphen G heißt die Cliquenzahl von G und wird mit $\omega(G)$ bezeichnet.

Satz.

Für jeden schlingeren Graphen G gilt $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

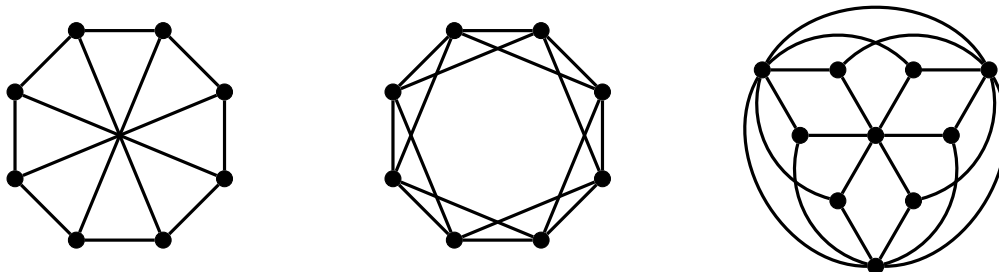
Bipartiter Graph.

Ein Graph G mit $\chi(G) \leq 2$ heißt bipartit.

Satz.

Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

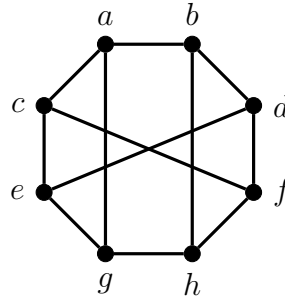
1. Bestimmen Sie die chromatischen Zahlen der folgenden Graphen.



2. Sei G der Graph mit Knotenmenge $\{1, 2, \dots, 100\}$, bei dem zwei verschiedene Knoten i, j genau dann benachbart sind, wenn $|i - j| \leq 7$ gilt. Bestimmen Sie die chromatische Zahl von G .
3. Sei G ein einfacher Graph, der aus einem Kreis der Länge 7 und $\binom{7}{3}$ zusätzlichen Knoten besteht, wobei jeder der zusätzlichen Knoten mit genau drei Knoten des Kreises benachbart ist, sodass je zwei zusätzliche Knoten nicht dieselben Nachbarn besitzen. Bestimmen Sie die chromatische Zahl von G .
4. Bestimmen Sie alle einfachen Graphen G mit $\chi(G) = 3$ und mit
 - (a) $\chi(G - e) < 3$ für jede Kante e ;

(b) $\chi(G - v) < 3$ für jeden Knoten v .

5. Bestimmen Sie die maximale chromatische Zahl aller einfachen Graphen mit höchstens 100 Kanten.
6. Bestimmen Sie die Anzahl der bei der gierigen Färbung verwendeten Farben in der Reihenfolge der Knoten a, b, c, d, e, f, g, h . Bestimmen Sie die Farbe des Knotens h .



7. Sei G ein einfacher Graph mit 500 Knoten, von denen 450 Knoten einen Grad von höchstens 49 haben. Beweisen Sie, dass $\chi(G) \leq 50$ gilt.
8. Sei G ein einfacher Graph mit 100 Knoten und $\omega(\overline{G}) = 10$ und $\Delta(G) \geq 92$. Beweisen Sie, dass $\chi(G) \geq 11$ gilt.
9. Sei G ein Graph, dessen jeder Knoten entweder rot oder grün ist, sodass G keinen einfarbigen Kreis ungerader Länge enthält. Beweisen Sie, dass $\chi(G) \leq 4$ gilt.