

Bipartite Graphen, Paarungen, griechische Buchstaben

GRUNDLAGEN DER THEORETISCHEN INFORMATIK

Übung 8

2021

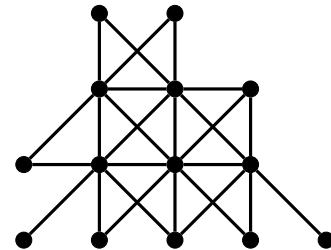
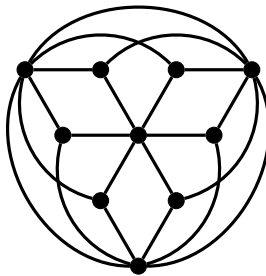
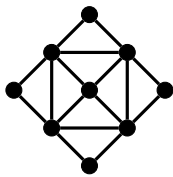
Satz von Frobenius.

Ein bipartiter Graph $G = (A, B; E)$ hat genau dann eine vollständige Paarung (ein perfektes Matching), wenn $|A| = |B|$ und $|X| \leq |N(X)|$ für alle $X \subseteq A$ gelten.

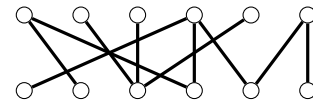
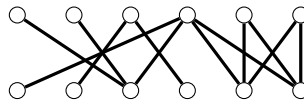
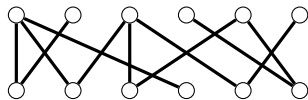
Satz von Hall (Heiratssatz).

Ein bipartiter Graph $G = (A, B; E)$ hat genau dann eine A überdeckende Paarung, wenn $|X| \leq |N(X)|$ für alle $X \subseteq A$ gilt.

1. Bestimmen Sie eine maximale unabhängige, sowie eine minimale überdeckende Knoten- und Kantenmenge in den folgenden Graphen.



2. Bestimmen Sie die Mächtigkeit einer maximalen Paarung in den folgenden bipartiten Graphen.



3. Sei G ein einfacher, zusammenhängender Graph mit 100 Knoten und mit einer Paarung der Größe 25. Beweisen Sie, dass $\omega(\overline{G}) \leq 75$ gilt.
4. Sei T ein Baum mit 100 Knoten. Beweisen Sie, dass $\alpha(T) \geq 50$ gilt.
5. Beweisen Sie, dass für jeden Graphen G die Abschätzung $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ gilt.
6. Sei $G = (A, B; E)$ ein einfacher, bipartiter Graph mit $|A| = 28$ und $|B| = 33$. Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn es $Y \subseteq B$ gibt, sodass $|Y| = 18$ und $|N(Y)| = 12$ gelten, dann ist die Hall-Bedingung für A nicht erfüllt (d. h., es gibt $X \subseteq A$, sodass $|N(X)| < |X|$ gilt).
7. Sei G ein bipartiter Graph mit 88 Knoten und $\alpha(G) = 44$. Beweisen Sie, dass die Hall-Bedingung erfüllt ist, d. h., $|X| \leq |N(X)|$ gilt für alle $X \subseteq A$.
8. In einer Gemeinschaft, die aus 12 Jungen und 12 Mädchen besteht, kennt jede Person mindestens 6 gegengeschlechtlichen Leute (wobei Bekanntschaften gegenseitig sind). Beweisen Sie, dass die ganze Gemeinschaft sich in Jungen-Mädchen-Paare so formieren lässt, dass die Mitglieder jedes Paares einander kennen.

9. Sei $G = (A, B; E)$ ein bipartiter Graph mit $|A| = 100$ und $|B| = 200$. Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn $d(a) \geq 70$ für alle $a \in A$ und $d(b) \geq 30$ für alle $b \in B$ gelten, dann enthält G eine A überdeckende Paarung.
10. Sei $G = (A, B; E)$ ein bipartiter Graph. Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn $|N(X)| \geq |X| - 1$ für alle $X \subseteq A$ gilt, dann enthält G eine Paarung, die die Partitionsklasse A mit Ausnahme von einem Knoten überdeckt.
11. An einem Ausflug nehmen n Ehepaare teil, an die $2n$ verschiedene Schokoladen ausgeteilt werden. Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn jede Person mindestens n verschiedene Schokoladen mag und jede Schokolade bei mindestens einem Partner jedes Ehepaars beliebt ist, dann können die Schokoladen so ausgeteilt werden, dass jede Person genau eine Schokolade erhält, die sie mag.
12. Sei $G = (A, B; E)$ ein bipartiter Graph, dessen Kanten entweder rot oder grün gefärbt sind, sodass in dem roten Teilgraphen die Hall-Bedingung für A und in dem grünen Teilgraphen die Hall-Bedingung für B erfüllt ist. Beweisen Sie, dass es einen Teilgraphen H von G gibt, dessen jede Komponente ein Kreis mit abwechselnden roten und grünen Kanten ist.
13. Sei $G = (A, B; E)$ ein bipartiter Graph mit $|B| = 33$, in dem jeder Knoten in A den Grad 6 und jeder Knoten in B den Grad 4 hat. Bestimmen Sie die Mächtigkeit einer maximalen Paarung.