Kombinatorikus játékok, Grundy-számozás

Algoritmikus játékelmélet

1. gyakorlat

2024.

Kombinatorikus játék. A (G, N_W, N_T, N_L, v_0) ötöst (véges) kombinatorikus játéknak nevezzük, ha $G = (V, E)$ egy véges, irányított, aciklikus gráf, N_W, N_T, N_L a G nyelőinek egy partíciója, és $v_0 \in V$.

A kombinatorikus játékok kétszemélyes játékok, ahol a játékosok teljes információval rendelkeznek és felváltva lépnek G irányított élei mentén egyet-egyet. A kezdőállás az u csúcs, és a játék akkor ér véget, ha valamelyik játékos belép egy nyelőbe. Ha ez a nyelő N_W-beli, akkor az utolsónak lépő játékos nyert (és a másik játékos vesztett), ha a nyelő N_T-beli, akkor a játék eredménye döntetlen, ha pedig a nyelő N_L-beli, akkor az utolsónak lépő játékos veszít (a másik játékos pedig nyer).

Éles és betli játék. Egy (G, N_W, N_T, N_L, v_0) kombinatorikus játékot éles játéknak nevezzük, ha $N_T = N_L = \emptyset$. A játékot betli játéknak nevezzük, ha $N_W = N_T = \emptyset$.

Állások típusa. Egy olyan állást, melyből a soron következő játékos tud nyerni, I-es típusúnak nevezünk. Egy olyan állást, melyből a soron következő játékos nem tudja garantálni a győzelmet, de tud döntetlent játszani, $*$-típusúnak nevezünk. Egy olyan állást, melyből a soron következő játékos se győzelmet, se döntetlent nem tud garantálni, II-es típusúnak nevezünk.

Kombinatorikus játék típusa. A (G, N_W, N_T, N_L, v_0) kombinatorikus játék típusán a v_0 csúcsnak megfelelő állás típusát értjük.

Mag. A $G = (V, E)$ gráf egy $S \subseteq V$ független ponthalmazát magnak nevezzük, ha minden $(V \setminus S)$-beli csúcsnak van S-beli szomszédja.

Kombinatorikus játékok összege. A J és J' kombinatorikus játék összegén azt a $J+J'$ kombinatorikus játékot értjük, melyben a két játékos párhuzamosan játssza a J és J' játékokat úgy, hogy a soron következő játékos a J és J' játékok közül pontosan az egyikben lép egyet, és a $J + J'$ végeredménye az utoljára befejezett játék eredménye lesz.

Kombinatorikus játékok ekvivalenciája. A J és J' éles kombinatorikus játékokat ekvivalensnek nevezzük, ha $J + J'$ egy II-es típusú játék.

Grundy-számozás. Egy $G = (V, E)$ gráffal rendelkező éles kombinatorikus játék Grundy-számozása egy olyan $g\colon V \to \mathbb{N}$ függvény, melyre tetszőleges $v \in V$ esetén $g(v) = \operatorname{mex}\big\{g(w) \;\big|\; vw \in E\big\}$, ahol egy nemnegatív számokból álló halmaz mex (minimum excludant) értékén azt a legkisebb nemnegatív egész számot értjük, ami nincs benne a halmazban.

Tétel. Minden éles kombinatorikus játéknak létezik egyértelmű Grundy-számozása.

Nim-összeg. Az $a, b \in \mathbb{N}$ számok nim-összegét úgy kapjuk meg, hogy mindkét számot felírjuk kettes számrendszerben és az azonos helyiértéken szereplő számjegyeiket modulo 2 összeadjuk. Jele: $a \oplus b$.

Sprague–Grundy-tétel. Ha a $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ gráfokkal rendelkező éles kombinatorikus játékok Grundy-számozása rendre $g\colon V \to \mathbb{N}$ és $g'\colon V' \to \mathbb{N}$, akkor a két játék összegének Grundy-számozása $g \oplus g'\colon V \times V' \to \mathbb{N}$.

Kupacos játék. Adott egy $n \in \mathbb{N}$ kavicsból álló kupac és egy $S \subseteq \mathbb{N}_+$ nemüres, véges halmaz. A soron következő játékos választ egy $s \in S$ számot és elvesz s kavicsot a kupacból.

A k-nim játék. Adott $k \in \mathbb{N}_+$ kupac kavics, ahol a kupacok méretei $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_+$. A soron következő játékos választ egy kupacot és abból elvesz bármennyi, de legalább egy darab kavicsot.

Mérgezett csoki (chomp). Adott egy $(n \times m)$-es tábla csoki (ahol $n, m \in \mathbb{N}_+$), melynek a bal alsó kockája mérgezett. A soron következő játékos kiválaszthatja a maradék csokidarab egy kockáját, és leharapja azt, valamint az összes tőle jobbra és felfele levő kockát. Az veszít, aki megeszi a mérgezett kocka csokit.

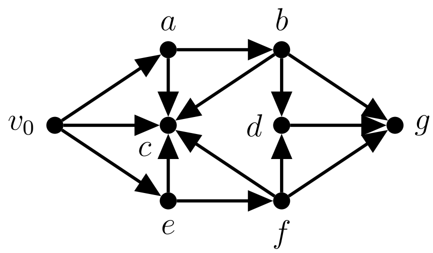
Kombinatorikus játékok, Grundy-számozás

Algoritmikus játékelmélet

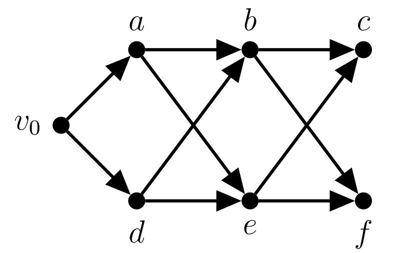
1. gyakorlat

2024.

1. Mutassuk meg, hogy minden betli játék visszavezethető egy éles játékra.
2. Határozzuk meg minden állás típusát az alábbi kombinatorikus játékokban.

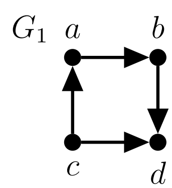


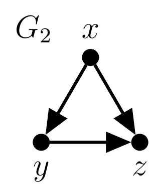
$N_W = \{c\}$, $N_T = \emptyset$, $N_L = \{g\}$



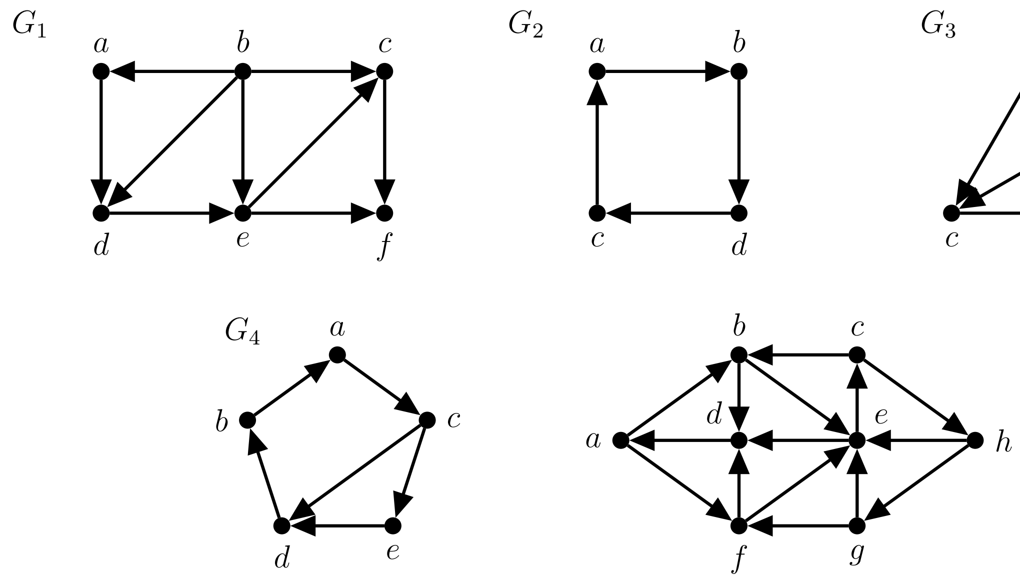
$N_W = \emptyset$, $N_T = \{c\}$, $N_L = \{f\}$

3. (a) Határozzuk meg a 2. feladatban szereplő gráfok által leírt éles játékok Grundy-számozását (tehát most a 2. feladattól eltérően minden nyelő N_W-beli).
   (b) Határozzuk meg az alábbi két gráf által leírt (tetszőleges kezdőállású) éles játékok összegének a Grundy-számozását.
   (c) Mely kezdőállásokra lesz az alábbi két gráf által leírt éles játékok összege II-es típusú?





4. Adott két kupac zseton, ahol a kupacok mérete $n, m \in \mathbb{N}_+$. A soron következő játékos valamelyik kupacot kidobja, és a másik kupacot két nemüres kisebb kupacra osztja fel. Az veszít, aki nem tud lépni. Határozzuk meg, hogy mikor van a kezdőjátékosnak nyerő stratégiája.
5. (a) Határozzuk meg a kupacos játékban az állások típusát $S = \{2, 4, 7\}$ esetén.
   (b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges S esetén a II-es típusú állások halmaza egy idő után periodikus.
6. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}_+$ esetén az $(n \times n)$-méretű chomp játékban a kezdőjátékosnak van nyerő stratégiája.
7. Adjunk optimális stratégiát a kupacos játéknak arra a változatára, melyben $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ és a győztes játékos annyi pénzt nyer el a másik játékostól, ahány kavicsot ő összesen elvett a játék során.
8. Keressünk az alábbi gráfokban magot, vagy ha nincs bennük, akkor bizonyítsuk ezt be.



9. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy páratlan hosszú irányított kör, akkor nincs magja.

10. Legyen G egy olyan irányított gráf, melyet egy irányítatlan gráfból kaptunk úgy, hogy annak minden élét helyettesítettük egy oda-vissza irányított élpárral. Van-e bizonyosan G-ben mag? Ha van, akkor tudunk-e polinomidőben találni egyet?

11. Adjunk optimális stratégiát olyan általánosított kombinatorikus játékokra, melyekben győzelem, döntetlen és vereség helyett minden nyelő csúcsban egy $-k$ és k közötti egész szám van megadva (ami lehet $\pm k$ is), mely azt írja le, hogy az odalépő játékos mennyi pénzt nyer el a másik játékostól.

12. Bizonyítsuk be, hogy az éles kombinatorikus játékok ekvivalenciája valóban egy ekvivalenciareláció, azaz reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

13. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G irányított gráfban nincs páros hosszú irányított kör, akkor G-nek legfeljebb egy magja van.

14. (a) Legyen G egy olyan irányított gráf, mely irányítatlan értelemben egy páros gráf. Mutassuk meg, hogy G-nek van magja.
    (b) Mutassuk meg, hogy ha az erősen összefüggő G gráfban nincs páratlan hosszú irányított kör, akkor G irányítatlan értelemben egy páros gráf.
    (c) Bizonyítsuk be Richardson tételét: ha egy G irányított gráfban nincs páratlan hosszú irányított kör, akkor G-nek van magja.