

Stratégiai játékok

ALGORITMIKUS JÁTÉKELMÉLET

3. gyakorlat

2024.

Stratégiai játék. Adott $n \in \mathbb{N}_+$ játékos, és tetszőleges $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén adott az i -edik játékoshoz a lehetséges stratégiáinak egy véges S_i halmaza, valamint egy $u_i: S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ nyereségfüggvény. Minden játékos ismeri a többiek lehetséges stratégiáit és nyereségfüggvényeit. A játék elején a játékosok egymástól függetlenül kiválasztanak egy-egy stratégiát azzal a céllal, hogy maximalizálják a saját nyereségüket.

Pareto-optimális stratégiaválasztás. Az $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ stratégiaválasztás Pareto-optimális, ha nem létezik olyan $(s'_1, \dots, s'_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ stratégiaválasztás, melyre a következők teljesülnek:

- minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $u_i(s_1, \dots, s_n) \leq u_i(s'_1, \dots, s'_n)$, és
- létezik olyan $j \in \{1, \dots, n\}$, hogy $u_j(s_1, \dots, s_n) < u_j(s'_1, \dots, s'_n)$.

Gyenge dominálás. A $z \in S_i$ stratégia gyengén dominálja a $z' \in S_i$ stratégiát, ha tetszőleges $s_1 \in S_1, \dots, s_{i-1} \in S_{i-1}, s_{i+1} \in S_{i+1}, \dots, s_n \in S_n$ esetén

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, z, s_{i+1}, \dots, s_n) \geq u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, z', s_{i+1}, \dots, s_n).$$

Erős dominálás. A $z \in S_i$ stratégia erősen dominálja a $z' \in S_i$ stratégiát, ha tetszőleges $s_1 \in S_1, \dots, s_{i-1} \in S_{i-1}, s_{i+1} \in S_{i+1}, \dots, s_n \in S_n$ esetén

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, z, s_{i+1}, \dots, s_n) > u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, z', s_{i+1}, \dots, s_n).$$

1. Adott a K_n teljes gráf, ahol $n \geq 2$ egy egész szám. A soron következő játékos kiválasztja K_n egy (korábban még egyik játékos által sem választott) élét. Az a játékos nyer, aki először kiválasztja egy feszítőfa minden élét. Mutassuk meg, hogy a kezdőjátékosnak van nyerő stratégiája.
2. Bizonyítsuk be, hogy egy \mathcal{H} hipergráfon játszott építő-építő játékban a kezdőjátékosnak mindig van nemvesztő stratégiája.
3. Mutassuk meg, hogy ha egy \mathcal{H} hipergráfon játszott építő-romboló játékban a romboló játékosnak van nemvesztő stratégiája, akkor a \mathcal{H} hipergráfon játszott romboló-építő játékban is van neki nemvesztő stratégiája.
4. Legyen $G = (V, E)$ az a gráf, amit egy n -csúcsú körből úgy kapunk, hogy a körön minden másodszomszédos csúcspár közé is behúzzunk egy élt (ahol $n \geq 3$ egy egész szám). A soron következő játékos kiválaszt egy (korábban még egyik játékos által sem választott) V -beli csúcspot. Az a játékos veszít, aki először kiválasztja valamely E -beli él mindkét végpontját. Mutassuk meg, hogy a második játékosnak van nyerő stratégiája.
5. Határozzuk meg az alábbi játékokban a Pareto-optimális stratégiaválasztásokat.

(a) Szarvasvadászat: két vadásznak kell arról döntenie, hogy szarvasra vagy nyúlra vadásznak-e.

	szarvas	nyúl
szarvas	(4, 4)	(0, 2)
nyúl	(2, 0)	(1, 1)

(b) Háború és béke: két országnak kell arról döntenie, hogy háborúval oldják-e meg a konfliktusukat.

	háború	béke
háború	$(-1, -1)$	$(0, -2)$
béke	$(-2, 0)$	$(2, 2)$

(c)

	\triangle	\square
\checkmark	$(24, 24)$	$(42, \sqrt[3]{5})$
\circ	$(\pi, 33)$	$(0, 0)$

(d) Tószennyezés: egy tó köré épült három gyár dönt arról, hogy szennyezzék vagy tisztítsák-e a tó vizét a következő évben. A vizet szennyezni ingyenes, a tisztítás azonban 1 egységnyi pénzbe kerül. Ha azonban legalább két gyár szennyezi a vizet, akkor a tó vize teljesen használhatatlanná válik, és minden gyárnak külön-külön 3 egységnyi pénzbüntetést kell fizetnie.

Ha a 3. gyár szennyez:

	2. gyár	szennyez	tisztít
1. gyár	szennyez	$(-3, -3, -3)$	$(-3, -4, -3)$
	tisztít	$(-4, -3, -3)$	$(-1, -1, 0)$

Ha a 3. gyár tisztít:

	2. gyár	szennyez	tisztít
1. gyár	szennyez	$(-3, -3, -4)$	$(0, -1, -1)$
	tisztít	$(-1, 0, -1)$	$(-1, -1, -1)$

6. Két diák közösen dolgozik egy csoportmunka keretében egy tanórán, ahol a házi feladatot együtt adják be. Mindkét diák elég ügyes ahhoz, hogy egyedül is megoldja hibátlanul a kiadott feladatot. A leadási határidő előtti napon mindkét diák választhat, hogy lemegy a könyvtárba és megoldja a házi feladatot, vagy elmegy bulizni a barátaival. Ha legalább az egyikük úgy dönt, hogy lemegy a könyvtárba, akkor a hibátlanul megoldott házi feladat mindkettejüknek 10-10 pontnyi örömet okoz, viszont ha egyikük sem dolgozik, akkor a meg nem oldott házi feladat mindkettejüknek 2-2 pontnyi szomorúságot okoz. Azonban, ha csak az egyik diák megy le a könyvtárba, akkor neki egyedül megoldani a feladatot 7 pontnyi erőfeszítésbe kerül, míg ha közösen dolgoznak, akkor az erőfeszítés mindkét diák számára 2-2 pontba kerül. A bulizás nem jár erőfeszítési költséggel, de p pontnyi boldogságot okoz, ahol $p \in \mathbb{R}$. A különféle pontszámok megfelelő előjellel összeadódnak. A diákok nem tudnak egymással kommunikálni, mielőtt eldöntenék, hogy a könyvtárba vagy bulizni menjenek-e. Írjuk fel a nyereségmátrixot és p minden lehetséges értékére döntsük el, hogy mik a Pareto-optimális stratégiaválasztások.

7. Alkalmazzuk a szigorú iterált eliminálást az alábbi stratégiai játékban.

	bal	közép	jobb
fel	$(2, 3)$	$(0, 2)$	$(1, 1)$
le	$(1, 1)$	$(5, 0)$	$(0, 4)$

8. Mutassunk példát olyan stratégiai játékra, melynek a nyereségmátrixának minden eleme különböző, de a laza iterált eliminálás után akármelyik stratégiaválasztás megmaradhat egyetlenként.

9. Mutassuk meg, hogy bármely A és B nyereségmátrixszal adott kétszemélyes stratégiai játék esetén megadható olyan C nyereségmátrixú stratégiai játék, amiből az A , illetve a B nyereségmátrixú játékok bármelyike megkapható laza eliminálások iterálásával.

10. Tegyük fel, hogy a tószennyezési játékban a 3. gyár tudja a másik két gyárról, hogy azok egymástól függetlenül p valószínűséggel tisztítják a tó vizét. Határozzuk meg minden $p \in [0, 1]$ értékre, hogy milyen döntéssel jár jobban a 3. gyár.