Mátrixjátékok

Algoritmikus játékelmélet

5. gyakorlat

2024.

Lineáris programozási feladat.

$$\begin{array}{rcl} \max/\min & c_1x_1 + \ldots + c_nx_n & \\ & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & \leq/=/\geq \quad b_1 \\ & & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & \leq/=/\geq \quad b_m \end{array}$$

Maximin stratégia. Egy játékos olyan kevert stratégiáját, mely maximalizálja számára a lehető legkisebb várható nyereséget a többi játékos bármilyen kevert stratégiái esetén, maximin stratégiának nevezünk.

Neumann-tétel. Minden véges, kétszemélyes, 0-összegű mátrixjátékban a sorjátékos minimális várható nyereségének maximuma megegyezik az oszlopjátékos maximális várható veszteségének minimumával.

Tétel. A játékosok maximin stratégiái minden véges, kétszemélyes, 0-összegű mátrixjátékban éppen a kevert Nash-egyensúlyoknak felelnek meg.

1. Tekintsük az alábbi nyereségmátrixú játékokat (ahol $t \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges paraméter).
   (a) Írjuk fel a sorjátékos maximin stratégiáit leíró lineáris programozási feladatot.
   (b) Írjuk fel az oszlopjátékos maximin stratégiáit leíró lineáris programozási feladatot.
   (c) Határozzuk meg a játékosok maximin stratégiáit.
   (d) Melyik játékosnak kedvez a játék?

   (i)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$
   (ii)
   $$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 1 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$
   (iii)
   $$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   (iv)
   $$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

2. Két játékos, Piros és Kék, a következő játékot játsszák. Mindketten egymástól függetlenül választanak egy számot az 1 és 2 számokból. Ha a választott számok összege páros, akkor Piros nyer, ha páratlan, akkor Kék. A vesztes mindig kifizeti a két választott szám összegét a nyertesnek.
   (a) Írjuk fel a nyereségmátrixot.
   (b) Írjuk fel a sorjátékos maximin stratégiáit leíró lineáris programozási feladatot.
   (c) Írjuk fel az oszlopjátékos maximin stratégiáit leíró lineáris programozási feladatot.
   (d) Határozzuk meg a játékosok maximin stratégiáit.
   (e) Melyik játékosnak kedvez a játék?

3. Alább látható egy kétszemélyes, 0-összegű mátrixjáték nyereségmátrixa. Mutassuk meg, hogy $\underline{x} = (7/8,\ 0,\ 1/8)$ a sorjátékos, és $\underline{y} = (1/4,\ 3/4,\ 0)^\top$ az oszlopjátékos egy maximin stratégiája.
   $$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 7 & 5 & \pi \\ 27 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Piros- és Kékország egymással háborúzik. A csata két színtéren zajlik: egy pirosországi és egy kékországi csatatéren. A Piros Királynak 3, a Kék Királynak 4 serege van. Mindkét király egymástól függetlenül egyidőben eldönti, hogy melyik csatatérre hány sereget küld, és a két csatát egyszerre vívják meg. Ha ugyanannyi piros és kék sereg sorakozik fel egy csatatéren, akkor a seregek visszavonulnak és ennek a csatának az eredménye döntetlen. Ha valamelyik király több sereget küld az egyik csatatérre, akkor ott ő nyeri csatát és foglyul ejti a másik király összes odaküldött seregét: a megnyert csatáért 20 Ft-ot nyer a másik királytól, valamint minden foglyul ejtett seregért további 10 Ft váltságdíjat is kap tőle.
   (a) Írjuk fel a nyereségmátrixot.
   (b) Írjuk fel a sorjátékos maximin stratégiáit leíró lineáris programozási feladatot.
   (c) Írjuk fel az oszlopjátékos maximin stratégiáit leíró lineáris programozási feladatot.
   (d) A Piros Király azt tervezi, hogy rendre 9/68, 23/68, 28/68, 8/68 valószínűségekkel küld 0, 1, 2, 3 sereget a pirosországi csatatérre, a Kék Király pedig 5/12, 0, 2/12, 0, 5/12 valószínűséggel küld 0, 1, 2, 3, 4 sereget ugyanide. Mutassuk meg, hogy ezzel mindketten egy maximin stratégiát választottak.
5. Egy kétszemélyes, 0-összegű mátrixjáték nyereségmátrixa egy „bűvös négyzet”, azaz egy olyan $(n \times n)$-es mátrix, melynek minden sorában, illetve minden oszlopában az elemek összege ugyanaz a szám; legyen ez az összeg k. Mutassuk meg, hogy a játék értéke (azaz a sorjátékos minimális várható nyereségének maximuma) k/n.
6. Két pakli kártya, egy A és egy B jelű van az asztalon képpel lefelé. Mindkét pakli 6 darab fekete kártyából áll. A Piros játékos becsukja a szemét, amíg a Kék játékos kicserél néhány fekete kártyát fehérre: vagy 2 kártyát az A pakliban, vagy 1 kártyát a B pakliban. Ezután Kék megkeveri a választott paklit és visszateszi azt az eredeti helyére. Ekkor Piros kinyitja a szemét, és kiválaszt tetszőleges 2 kártyát a 2×6 darab kártya közül. Ha a kiválasztott kártyák közül legalább egy fehér, akkor Kék nyer, ellenkező esetben viszont Piros. A vesztes minden esetben 100 Ft-ot fizet a nyertesnek. Határozzuk meg a játékosok maximin stratégiáit.
7. A következő játék a póker végjátékának egy leegyszerűsített modellje. A két játékos, Kék és Piros, rendre 10 Ft és 20 Ft tétet rak be a kasszába. Kék ezután dob egy szabályos dobókockával, de az eredményt titokban tartja Piros előtt. Ezután Kék vagy passzolhat azzal, hogy azt mondja, kicsit dobott, vagy emelhet azzal, hogy azt mondja, nagyot dobott. Ebben a játékban a nagy azt jelenti, hogy 5-öst vagy 6-ost dobott, míg a kicsi azt jelenti, hogy ettől különböző értéket dobott – de természetesen Kék állítása nem feltétlenül igaz. Ha Kék azt mondja, hogy kicsit dobott, a játék véget ér, és a tétek Piroshoz kerülnek. Ha viszont azt mondja, hogy nagyot dobott, akkor további 30 Ft-ot kell a kasszába raknia. Most Piros következik: vagy bedobhatja a lapjait azzal, hogy hisz a Kéknek, vagy tarthatja a tétet azzal, hogy azt mondja a Kéknek, hogy hazudik. Az első esetben a játék véget ér, és Kék nyeri a kasszában lévő pénzt (függetlenül attól, mit dobott). A második esetben Piros is további 30 Ft-ot tesz a kasszába, és jön az igazság pillanata: Kék megmutatja, mit dobott, és ha valóban nagyot (5-öst vagy 6-ost), akkor ő nyeri a kasszában lévő pénzt, ha kicsit dobott, akkor Pirosé lesz a kasszában lévő pénz. Határozzuk meg a játékosok maximin stratégiáit.
8. Egy tengeralattjáró egy (3×3)-as rács két oldalszomszédos mezőjén áll. Egy bombázó repülőgépről, ahonnan nem látszik a víz alatti jármű, bombát dobnak a kilenc mező valamelyikére. Ha a bombázó eltalálja a tengeralattjárót, akkor 1 pontot kap, a tengeralattjáró viszont ekkor 1 pontot veszít, ha azonban a bombázó nem találja el a tengeralattjárót, akkor a tengeralattjáró kap 1 pontot, a bombázó pedig veszít 1 pontot. Határozzuk meg a játékosok egy-egy tetszőleges maximin stratégiáját.