

Rendszeroptimalizálás mérnöktanároknak

2021. tavasz

3. óra

Tétel. (Optimalitási feltételek.)

Tegyük fel, hogy az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_1, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

(avagy röviden $Ax \leq b, x \geq 0$) rendszer megoldható és a $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ (avagy röviden cx) célfüggvény felülről korlátos a megoldáshalmazon. Legyen x^* egy primál és y^* egy duál megoldás. Ekkor x^* és y^* akkor és csak akkor optimális megoldások, ha

- minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $x_i^* = 0$ vagy $a_{1i}y_1^* + \dots + a_{ni}y_n^* = c_i$ (lehet mindkettő is), és
- minden $j \in \{1, \dots, m\}$ esetén $a_{j1}x_1^* + \dots + a_{jn}x_n^* = b_j$ vagy $y_j^* = 0$ (lehet mindkettő is).

- (a) Határozzuk meg az alábbi lineáris programozási feladat duálisát.
- (b) Igaz-e, hogy az $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 7$ választással egy optimális megoldást adtunk meg?
- (c) Igaz-e, hogy az $x_1 = 0, x_2 = 7, x_3 = 5, x_4 = 0$ választással egy optimális megoldást adtunk meg?
- (d) Igaz-e, hogy az $x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ választással egy optimális megoldást adtunk meg?
- (e) Igaz-e, hogy az $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 4$ választással egy optimális megoldást adtunk meg?

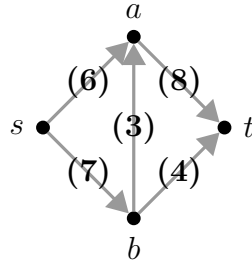
$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 22 \\ 3x_1 + 5x_3 + 4x_4 &\leq 25 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + x_4 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Határozzuk meg az alábbi lineáris programozási feladat duálisát.
- (b) Igaz-e, hogy az $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$ választással egy optimális megoldást adtunk meg?
- (c) Igaz-e, hogy az $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$ választással egy optimális megoldást adtunk meg?

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 - 5x_4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 &\leq 14 \\ -x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 2x_4 &\leq 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 11x_4 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

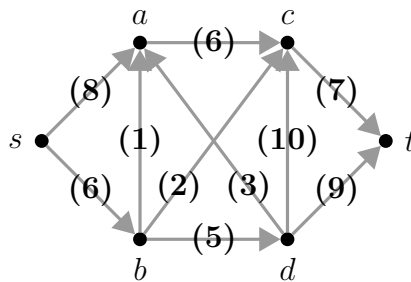
- Egy cég az alábbi hálózatban szeretne minél több olajat eljuttatni az s pontból a t pontba. Az ábrán látható számok az egyes csövek átmérőjét jelzik: óránként ennyi hordó olaj folyhat át az adott csövön.

- (a) Írjuk fel a feladatot lineáris programozási feladatként.
 (b) Oldjuk meg Excellel a feladatot.



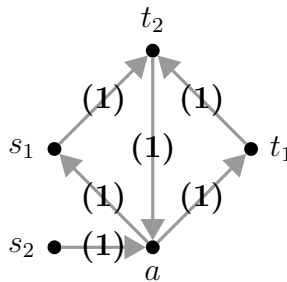
4. Egy cég az alábbi hálózatban szeretne minél több olajat eljuttatni az s pontból a t pontba. Az ábrán látható számok az egyes csövek átmérőjét jelzik: óránként ennyi hordó olaj folyhat át az adott csövön.

- (a) Írjuk fel a feladatot lineáris programozási feladatként.
 (b) Oldjuk meg Excellel a feladatot.



5. Egy cégnek két megbízása van: az s_1 városból a t_1 városba kell 1. típusú termékeket szállítania, az s_2 városból pedig a t_2 városba kell 2. típusú terméket szállítania. Minden leszállított termék 1 peták nyereséget jelent a cégnek. Az alábbi ábrán látható úthálózat maximális terhelhetősége miatt az egyes útszakaszokon átszállított termékek összege nem haladhatja meg az útszakaszra írt számot. Határozzunk meg egy-egy optimális szállítási tervet, ha mindkét termék

- (a) gabonaféle;
 (b) személygépjármű.



6. Öt alkatrészt kell megmunkálnunk és ehhez öt gép áll rendelkezésünkre. Minden gépen csak egy alkatrészt, és minden alkatrészt csak egy gépen munkálhatunk meg. A következő táblázat az alkatrészeknek az egyes gépeken való megmunkálási költségét jelzi. Melyik alkatrészt melyik gépen kell megmunkálnunk, ha minimalizálni szeretnénk a költségeinket?

	1. gép	2. gép	3. gép	4. gép	5. gép
1. alkatrész	4	5	6	6	6
2. alkatrész	3	6	6	7	9
3. alkatrész	3	7	7	7	8
4. alkatrész	4	8	8	7	7
5. alkatrész	4	9	9	8	8

Mennyi lesz a költségünk, ha az 1. gép elromlik, de a 2. gépen 2 alkatrészt is megmunkálhatunk?