

Függvények nagyságrendje

Adatstruktúrák és algoritmusok

1. gyakorlat

2015. február 6.

Def. Ha $f(n)$ és $g(n)$ a természetes számokon értelmezett, pozitív értékeket felvevő függvények, akkor

- i. $f = O(g)$ jelöli azt a tényt, hogy vannak olyan $c, n_0 > 0$ állandók, hogy $n \geq n_0$ esetén $f(n) \leq c \cdot g(n)$ teljesül.
- ii. $f = \Omega(g)$ jelöli azt a tényt, hogy vannak olyan $c, n_0 > 0$ állandók, hogy $n \geq n_0$ esetén $f(n) \geq c \cdot g(n)$ teljesül.
- iii. $f = \Theta(g)$ jelöli azt a tényt, hogy $f = O(g)$ és $f = \Omega(g)$ is teljesül.

1. Bizonyítsuk be, hogy

- (a) $2x^2 + x - 1 = \Theta(x^2)$;
- (b) $x^2 + 4x + 17 = O(x^3)$, de $x^3 \neq O(x^2 + 4x + 17)$;
- (c) $2^{n+1} = O(2^n)$, de $2^{2n} \neq O(2^n)$;
- (d) $1 + 2 + \dots + n = O(n^2)$, de $1 + 2 + \dots + n \neq O(n)$.

2. Egy \mathcal{A} algoritmusról azt tudjuk, hogy az n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy

- (a) van olyan x bemenet, amin a lépésszáma $|x|^3$;
- (b) minden x bemeneten legfeljebb $2007|x|$ lépést használ?

Szokás szerint $|x|$ az x szó hosszát jelöli.

3. Tekintsük az $f_1(n) = 2009n!$ és $f_2(n) = 100(n-1)!$ függvényeket. Igaz-e, hogy

- a) $f_1 = O(f_2)$ b) $f_2 = O(f_1)$ c) $f_1 = \Omega(f_2)$ d) $f_2 = \Omega(f_1)$?

4. Adjunk O becslést a következő függvényekre.

- (a) $(n^2 + 8)(n + 1)$
- (b) $(n \log_2 n + n^2)(n^3 + 2)$

5. Melyik az a legkisebb egész k , amelyre igaz, hogy az alábbi kifejezés $O(x^k)$?

- (a) $2x^2 + x^3 \log x$
- (b) $(x^4 + x^2 + 1)/(x^4 + 1)$

(c) $(x^3 + 5 \log x)/(x^4 + 1)$

6. Mi lehet $T(n)$, ha $T(1) = 2$ és $n \geq 2$ esetén $T(n) = 3 \cdot T(n - 1) + 1$?

7. Egy problémára két algoritmusunk van.

Az \mathcal{A} algoritmus az $n \geq 2$ méretű problémából 10 lépéssel 2 darab $n - 1$ méretűt készít és ezeket oldja meg rekurzívan.

A \mathcal{B} algoritmus az $n \geq 2$ méretű problémából 3 lépéssel 4 darab $n - 1$ méretűt készít és ezeket oldja meg rekurzívan.

Az $n = 1$ esetben mindkét eljárás 1 lépést használ.

Melyik algoritmus lesz nagy n értékekre gyorsabb?

8. Tegyük fel, hogy van egy számítógépes programunk, ami egy k méretű feladaton a jelenlegi gépünkön 1 nap alatt fut le. Beszereztünk egy százszor gyorsabb számítógépet. Ugyanazon programmal mekkora feladatot lehet az új gépen egy nap alatt megoldani, ha a program lépésszáma n méretű feladat esetén

(a) n ,

(b) n^3 ,

(c) 2^n ?