Minimális költségű feszítőfák

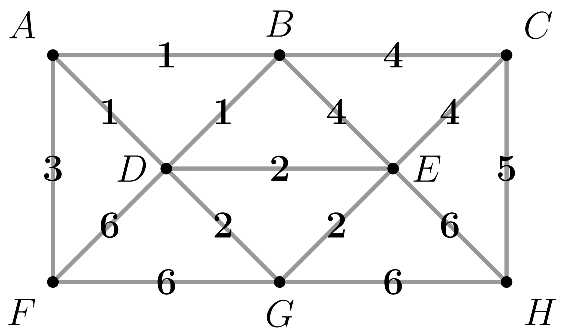
Adatstruktúrák és algoritmusok
8. gyakorlat

1. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával (zárójelben a költségek, az élek mindkét végpontjukból fel vannak sorolva):

   $\boldsymbol{a}$: $b(2), c(3)$; $\boldsymbol{b}$: $a(2), d(2)$; $\boldsymbol{c}$: $a(3), d(1)$;
   $\boldsymbol{d}$: $b(2), c(1), e(2), f(4)$; $\boldsymbol{e}$: $d(2), f(1), g(2)$; $\boldsymbol{f}$: $d(4), e(1), g(2), h(1)$;
   $\boldsymbol{g}$: $e(2), f(2), h(3)$; $\boldsymbol{h}$: $f(1), g(3)$;

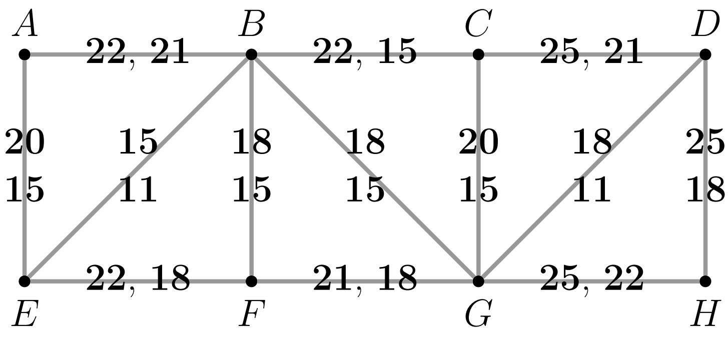
   Keressünk G-ben Prim, illetve Kruskal algoritmusával minimális költségű feszítőfát!

2. Hány különböző minimális súlyú feszítőfája van az ábrán látható gráfnak?



3. Hány éle van az n pontú egyszerű gráfnak, ha pontosan 3 különböző feszítőfája van?

4. Az alábbi ábrán látható G gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élen két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amelyen G minden pontja elérhető. Határozzunk meg egy lehető legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt.



5. Egy téglalap alaprajzú irodát $k \times n$ egyforma kis négyzet alakú részre osztunk. Az építész berajzolta az összes lehetséges falat, ezzel egy $k \times n$ méretű négyzetrácsot kapott. A kis négyzeteket határoló falak egy részét ki akarjuk hagyni oly módon, hogy a bal alsó sarokban levő négyzetből indulva mindenhova el tudjunk jutni.

Adott minden falra, hogy annak kihagyása mennyi költséggel jár. Adjon $O(k^2n^2)$ lépésszámú algoritmust, amivel meghatározhatjuk, hogy mely falakat hagyjuk ki, ha a célunk a költség minimalizálása.

6. Egy városban a közlekedési csomópontok és a köztük levő útszakaszok egy irányítatlan egyszerű gráffal adottak. Egy stáb filmet akar forgatni a város utcáin. Mindenhol szívesen forgatnának, minden útszakaszra kialkudtak egy-egy árat, hogy mennyit fizetnének, ha a város azt az útszakaszt lezáratja a forgatás idejére. A város vezetése minél nagyobb bevételre akar szert tenni, de azt azért belátták, hogy minden utcát nem zárhatnak le. Ezért az a céljuk, hogy úgy határozzák meg a lezárandó útszakaszokat, hogy a fennmaradt részben is mindenhonnan mindenhova el lehessen jutni a városban. Adjunk hatékony algoritmust, amivel a város vezetősége meghatározhatja, hogy mely útszakaszokat zárják le a forgatás idejére, ha a céljuk a bevételük maximalizálása.

7. A bal oldali ábrán látható a G irányítatlan gráf és az élek költségei. Határozzuk meg, hogy ha az e és a h csúcsok közé behúzunk egy új élet, akkor ezen élnek milyen (nemnegatív) költséget adhatunk ahhoz, hogy biztosan benne legyen a kapott gráfnak legalább egy minimális költségű feszítőfájában.