Leszámlálási feladatok, binomiális tétel

A számítástudomány alapjai
1. gyakorlat

2012. szeptember 6.

Ismétlés nélküli permutáció: Adott n db különböző elem összes lehetséges sorrendje
$n! := \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0; \\ n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, & \text{ha } n > 0. \end{cases}$
Ismétléses permutáció: Adott n db elem között az azonosak száma $k_1, k_2, \ldots, k_l$ (tehát $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_l$); ezek összes lehetséges sorrendje $\dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_l!}$.
Ismétlés nélküli variáció: Adott n db különböző elem közül k db-ot kiválasztva és sorba rendezve az n db elem k-ad rendű ismétlés nélküli variációit kapjuk: $V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
Ismétléses variáció: Ha adott n db különböző elem közül választhatunk k helyre úgy, hogy megengedünk ismétlődő elemeket is, akkor a kapott eseteket az n db elem k-ad rendű ismétléses variációinak nevezzük. $V_{ism}(n,k) = n^k$.
Ismétlés nélküli kombináció: Ha adott n db különböző elem közül kiválasztunk k db-ot úgy, hogy a sorrendre nem vagyunk tekintettel, akkor a kiválasztásokat az n db elem k-ad rendű ismétlés nélküli kombinációinak nevezzük. $C(n,k) = \binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.
Ismétléses kombináció: Ha n db különböző elemből kiválasztunk k db-ot úgy, hogy egy elem többször is választható és a sorrendre nem vagyunk tekintettel, akkor a kiválasztásokat az n db elem k-ad rendű ismétléses kombinációinak nevezzük. $C_{ism}(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$.

Binomiális tétel: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

1. Egy versenyen 7 versenyző van. Hányféle lehet az eredmény?

2. Hányféle szót lehet alkotni az M, A, T, E, M, A, T, I, K, A betűkből?

3. A $0, 1, 3, 5, 8$ számjegyekből hányféle
   (a) ötjegyű számot lehet alkotni, ha minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel?
   (b) hatjegyű számot lehet alkotni (egy számjegyet többször is felhasználhatunk)?
   (c) öttel osztható ötjegyű számot lehet alkotni, ha minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel?

4. (a) Egy 15 tagú klub elnököt, titkárt és jegyzőt választ. Hányféleképpen tehetik ezt?
   (b) És ha a népszerű Kovács úrnak mindenképpen szeretnénk valamilyen tisztséget adni?

5. Egy hiú lány festi a kezén a körmeit, de nem mindig az összeset, csak néhányat, esetleg egyet sem. Végigjárt négy 170 napos tanévet a gimnáziumban. Azzal dicsekszik, hogy a négy év alatt nem ment úgy iskolába kétszer, hogy pontosan ugyanazok a körmei lettek volna kifestve. Hihetünk neki?

6. 5 könyvünk van analízisről, 6 diszkrét matematikáról és 8 a számítógépekről. Hányféleképpen helyezhetjük el őket a polcunkon, ha az egyforma témájúaknak egymás mellett kell lenniük?

7. (a) Hányféle olyan ötjegyű szám van, melynek számjegyei szigorú monoton csökkenőek?
   (b) Hányféle olyan ötjegyű szám van, melynek számjegyei szigorú monoton növekvőek?
   (c) Hányféle olyan ötjegyű szám van, melynek számjegyei monoton csökkenőek?
   (d) Hányféle olyan ötjegyű szám van, melynek számjegyei monoton növekvőek?

8. Az összes lehetséges módon kitöltött lottószelvények között hány egy-, két-, három-, négytalálatos szelvény van?

9. Hányféleképpen állhat sorba n fiú és n lány úgy, hogy azonos neműek ne álljanak egymás mellett?

10. Hányféleképpen választható ki az $\{1, 2, \cdots, 100\}$ halmaznak két olyan A és B részhalmaza, amelyekre $A \subseteq B$ teljesül?

11. Hány bástyát lehet elhelyezni úgy a sakktáblán, hogy egyik se üsse a másikat? Hányféleképpen helyezhető el ez a maximális számú bástya a sakktáblán úgy, hogy ne álljanak ütésben? (* Mik a válaszok futókra?)

12. Hányféleképpen állhat fel fotózáshoz két egymás mögötti sorba 20 különböző magasságú ember úgy, hogy minden hátsó sorban álló magasabb legyen annál, aki az első sorban közvetlenül előtte áll?

13. Hányféleképpen lehet kiolvasni a METAMATEMATIKATEMATIKA szót, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk?

M	E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A
E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T
T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E
A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M
M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T	I	K		T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K	A

14. Bizonyítsuk be, hogy $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$!

15. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = ?$

16. Bizonyítsuk be, hogy nemüres halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan!