Oszthatóság, prímek, maradékrendszerek, Euler-Fermat-tétel, lineáris kongruenciák

11. gyakorlat

2012. november 29.

Tétel: Az $ax \equiv b \pmod{m}$ kongruenciának akkor és csak akkor létezik megoldása, ha $(a, m)|b$.
Tétel: Ha az $ax \equiv b \pmod{m}$ kongruencia megoldható, akkor a megoldásszáma (a, m).

1. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n számra
   (a) $6|\ n^3 - n$
   (b) $5|\ 2^{4n+1} + 3$;
   (c) $19|\ 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$.
2. Bizonyítsuk be, hogy $2010|\ 2009^{2009} - 2011^{2011} + 2012$.
3. Legyenek a és b természetes számok. Bizonyítsuk be, hogy ha $11|\ 3a+4b$, akkor $11|\ a+5b$.
4. Számítsuk ki az euklideszi algoritmus segítségével a legnagyobb közös osztókat:
   (a) $(899, 493)$;
   (b) $(24961, 9483)$.
5. Egy faluban négyszáz család él, 1-től 400-ig számozott házakban. A Mikulás megérkezik a krampuszaival a faluba. Az első krampusz minden házba visz egy ajándékot. A második krampusz csak minden második házba visz ajándékot (azaz az elsőbe nem, a másodikba igen, stb.), majd a harmadik krampusz minden harmadik házba és így tovább, végül az utolsó krampusz már csak az utolsó házba. Hány család kap páratlan sok ajándékot?
6. Melyik az a pozitív páros szám, aminek 13 pozitív osztója van?
7. Bizonyítsuk be, hogy a $0, 2, 4, 6, 8, \ldots, 100$ számok teljes maradékrendszert alkotnak modulo 51.
8. Határozzuk meg a $\varphi(60)$ és a $\varphi(11)$ értékeket.
9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes számra $\varphi(n^2) = n\varphi(n)$ teljesül.
10. Redukált maradékrendszert alkotnak-e az $5, 15, 25, 35, 45, \ldots, 155$ számok?
11. Mutassuk meg, hogy $35|\ 4^{24} - 3^{24}$.
12. Határozzuk meg 253^{683} utolsó két számjegyét.

13. Döntsük el, hogy megoldhatók-e az alábbi lineáris kongruenciák, és a megoldhatóakat oldjuk meg.

    (a) $3x \equiv 5 \pmod 7$
    (b) $14x \equiv 8 \pmod{21}$
    (c) $11x \equiv 12 \pmod{18}$

14. Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciákat:

    (a) $202x \equiv 157 \pmod{203}$
    (b) $91x \equiv 252 \pmod{35}$
    (c) $152x \equiv 88 \pmod{66}$