Absztrakt algebra

13. gyakorlat

2011. december 6.

Félcsoport: Egy $(S;*)$ egyműveletes algebrai struktúrát félcsoportnak nevezünk, ha a $*$ művelet asszociatív.
Csoport: Egy olyan egységelemes félcsoportot, amelyben minden elemnek van inverze, csoportnak nevezünk.
Részcsoport: Egy G csoport valamely H részhalmazát részcsoportnak nevezzük, ha H a G-ben értelmezett műveletre nézve csoport.
Mellékosztály: Legyen H egy G csoport részcsoportja. A gH szorzathalmazt a g elemhez tartozó bal oldali mellékosztálynak, a Hg szorzathalmazt a g elemhez tartozó jobb oldali mellékosztálynak nevezzük.
Csoport rendje: Egy csoport rendjén a csoport elemszámát értjük.
Index: Egy G csoport H részcsoportjának G-beli indexén a G csoport H szerinti bal oldali (jobb oldali) mellékosztályok számát értjük. Jelölés: $|G:H|$.
Lagrange-tétel: Tetszőleges véges G csoport bármely H részcsoportjának a rendje osztója a G csoport rendjének; pontosabban $|G| = |H| \cdot |G:H|$.
Generált részcsoport: Legyen $X \neq \emptyset$ részhalmaza egy G csoportnak. Az X-et tartalmazó legszűkebb G-beli részcsoportot a G csoport X részhalmaza által generált részcsoportnak nevezzük.
Ciklikus részcsoport: Az egy elem által generált részcsoportot ciklikus részcsoportnak nevezzük.
Elem rendje: Egy G csoport valamely a elemének rendjén az a elem által generált ciklikus részcsoport rendjét értjük.
Gyűrű: Egy $(R;+,\cdot)$ kétműveletes algebrai struktúrát gyűrűnek nevezünk, ha $(R;+)$ Abel-csoport, $(R;\cdot)$ félcsoport és a $\cdot$ művelet mindkét oldalról disztributív a $+$ műveletre nézve.
Test: Egy egységelemes R gyűrűt testnek nevezünk, ha a $\cdot$ művelet invertálható az $R \setminus \{0\}$ halmazon.

1. Döntsük el, hogy az alábbi táblázattal adott művelet asszociatív-e, illetve kommutatív-e az $\{a,b,c\}$ halmazon.

	a	b	c
a	a	a	c
b	a	b	c
c	c	c	b

2. Mutassuk meg, hogy $(\{a+b\sqrt{2} | a,b \in \mathbb{Q}\};+,\cdot)$ test.

3. Mutassuk meg, hogy egy csoport tetszőleges elemének rendje megegyezik az inverzének a rendjével.

4. Mutassuk meg, hogy egy csoport tetszőleges a, b elemére $o(ab) = o(ba)$ teljesül.

5. Mutassuk meg, hogy ha egy csoportban minden (egységtől különböző) elem másodrendű, akkor a csoport kommutatív.

6. Igaz-e, hogy egy 24-edrenű ciklikus csoportban van 4-ed, 5-öd, illetve 6-odrendű elem?

7. Végezzük el a megadott műveleteket.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$