Skatulya elv, szitaformula

2. gyakorlat

2011. szeptember 13.

1. Egy $n \times n$-es pontrács csúcsaiból hányféleképpen választhatjuk ki egy tengelypárhuzamos téglalap négy csúcsát?
2. Bizonyítsuk be, hogy
$$\binom{k}{k}\binom{n-k}{0} + \binom{k}{k-1}\binom{n-k}{1} + \binom{k}{k-2}\binom{n-k}{2} + \ldots + \binom{k}{0}\binom{n-k}{k} = \binom{n}{k}.$$
3. Bizonyítsuk be, hogy
$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$
4. * Bizonyítsuk be, hogy
$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = 2^{n-1}n.$$
5. * Mennyi a $(2+\sqrt{3})^{100}$ tizedesvessző utáni 43. jegye?
6. Egy osztályban 30 tanuló van. Igaz-e, hogy
   (a) van az évnek olyan hónapja, melyben legalább három tanulónak van születésnapja?
   (b) van az évnek olyan hónapja, melyben legalább négy tanulónak van születésnapja?

   Hány tanuló esetén állíthatnánk, hogy létezik az évnek olyan hónapja, melyben legalább öt tanulónak van születésnapja?
7. Hat pár fekete és hat pár kék zokni, amelyeket nem raktak össze párosával, összekeveredett egy fiókban. Teljes sötétségben hány darabot kell elővenned a 24 zokniból, hogy biztosan legyen köztük egy összeillő pár?
   És ha egy kék párra van szükségünk?
8. Egy osztályban három szakkör van: matematika, biológia és kémia. 24 diák jár legalább egyre. Öten vannak, akik biológiára és matekra is járnak. Ugyancsak öten vesznek részt biológián és kémián. Hét olyan ember van, akik matekra és kémiára is járnak. Három szorgos diák pedig mind a három szakkörön részt vesz. Hányan járnak pontosan egy szakkörre?
9. Az 1, 2, …, 100 számok közül hány olyan van, ami sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel nem osztható?
10. Egy 60 fős évfolyamból néhány embernek (legalább egynek) el kell menni előadásra, néhánynak (legalább egynek) az évnyitóra, néhánynak (legalább egynek) a kocsmába, de ezek egyszerre vannak, hányféleképpen tehetik ezt meg?
11. 10 rabló egy rengeteg lakattal lezárható ládába gyűjti a rabolt kincset. Úgy szeretnék a ládát lelakatolni, és kiosztani a kulcsokat (egy lakathoz többen is kaphatnak kulcsot), hogy bármely 4 rabló ki tudja nyitni a ládát, de ez semelyik 3 rablónak ne sikerülhessen. Legalább hány különböző lakatot kell venniük a vasboltban, hogy ezt megtehessék?
12. * Bizonyítsuk be, hogy bármely 57 egész szám között van néhány (legalább egy, de akár az összes), melyek összege osztható 57-tel.

Előző feladatsorról:

15. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = ?$
16. Bizonyítsuk be, hogy nemüres halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan!