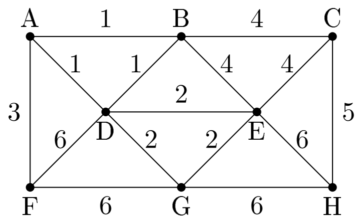
Fák, Prüfer-kód, minimális súlyú feszítőfa, Euler- és Hamilton-körök

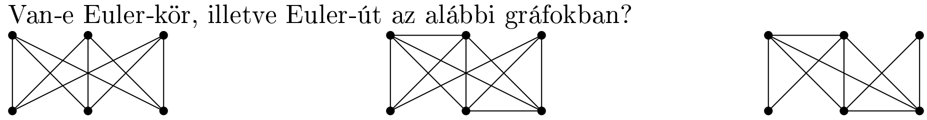
4. gyakorlat

2011. szeptember 27.

1. Bizonyítsuk be, hogy egy fában a csúcsok és az élek számának szorzata páros!
2. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$?
3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges T fa elsőfokú pontjainak száma legalább akkora, mint $\Delta(T)$.
4. Tegyük fel, hogy az F fának csak első- és negyedfokú csúcsai vannak, szám szerint n_1 ill. n_4. Igazoljuk, hogy $n_1 = 2 \cdot n_4 + 2$.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fába behúzunk egy élet, akkor pontosan egy kör keletkezik.
6. Egy fa Prüfer-kódja $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6)$. Mi a kód elkészítéséhez elsőnek törölt levél indexe? Mi a kódhoz tartozó fa?
7. Melyek azok a fák, melyek „bővített" Prüfer-kódja csupa különböző számból áll? És melyek azok, melyeknek csupa azonos számból áll?
8. Mutassuk meg, hogy a Prüfer-kódban az i-edik csúcs éppen $(d_i - 1)$-szer szerepel.
9. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, amely nem csillag?
10. Hány olyan fa van az $1, 2, \ldots, n$ pontokon, amelyben az 1-es csúcs elsőfokú?
11. Hány olyan fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_8$ csúcsokon, amelyben minden csúcs fokszáma vagy 1 vagy 3?
12. Hány különböző minimális súlyú feszítőfája van az ábrán látható gráfnak?



13. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú egyszerű összefüggő gráf, amire igaz a következő: G-ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek pedig 1 egységnyi súly úgy, hogy a G-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.)
14. Van-e Euler-kör, illetve Euler-út az alábbi gráfokban?



15. Mely $n \geq 2$ esetén tartalmaz Euler-kört, illetve Euler-utat az n csúcsú K_n teljes gráf?
16. Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G-ben, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Euler-kört, illetve Euler-utat?
17. Egy 12 egység hosszú drótból szeretnénk elkészíteni egy egységkocka élvázát úgy, hogy a kocka csúcsainál forrasztunk. Legkevesebb hány darabra kell felvágni ehhez az eredeti drótunkat? Mi a válasz akkor, ha a testátlóknak is benne kell lenniük az élvázban, és persze a kiindulási drótunk is 4 testátlónyival hosszabb?

18. A G gráfot úgy kapjuk, hogy az $1, 2, \ldots$ csúcscímkékkel ellátott teljes gráfban párhuzamos élekként megkettőzzük a $(2, 3, 2, 2, 5, 3, 5, 2)$ Prüfer-kódú F feszítőfa éleit. Van-e G-nek Euler-körsétája?

19. Tegyük fel, hogy G egy összefüggő gráf, és hogy K egy olyan köre G-nek, amelynek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja lesz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor K Hamilton-köre G-nek.

20. Bejárható-e az (a) 4×4-es, (b) 3×5-ös, (c) 3×6-os sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk?

21. A G egyszerű gráfnak $2n + 1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út!

22. Egy G egyszerű gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz G Hamilton-kört, illetve Hamilton-utat?

23. Egy $3 \times 3 \times 3$ méretű sajtkocka 27 kis kockából áll. Egy egér a kis kockákat egyesével tervezi elfogyasztani úgy, hogy egy kis kocka után mindig olyan következzen, amelyiknek éppen az elfogyasztottal van közös lapja. Az egér az egyik sarokból kezdi a lakomát.

    (a) El tudja-e fogyasztani a teljes sajtot úgy, hogy utoljára olyan kockát fogyasszon, amelyiknek van közös lapja az elsővel?

    (b) És úgy, hogy a középső -legfinomabb- kockánál fejezze be az evést?

24. Az $n \geq 3$ pontú K_n teljes gráfból töröltük egy feszítőfájának éleit, majd a feszítőfa élei közül visszaraktunk kettőt. Mutassuk meg, hogy az így nyert G gráf tartalmaz Hamilton-kört!

25. Egy 51 csúcsú összefüggő egyszerű gráfban egy csúcs foka 30, a többié 19.

    (a) Bizonyítsuk be, hogy a gráf komplementerében van Hamilton-kör.

    (b) Bizonyítsuk be, hogy az eredeti gráfhoz hozzá lehet venni 25 élet úgy, hogy a kapott gráf is egyszerű legyen, és legyen Euler-köre.

26. Mutassuk meg, hogy ha G egy 16 csúcsú 9-reguláris egyszerű gráf, akkor G-ből elhagyható 8 él úgy, hogy a maradék gráfnak legyen Euler-köre.