Menger tételei, többszörös összefüggőség; Páros gráfok, párosítások

7. gyakorlat

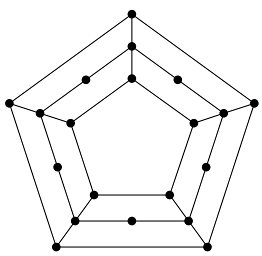
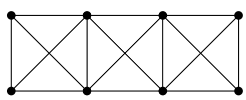
2011. október 18.

Egy G gráfot *k-szorosan (pont)összefüggőnek* nevezünk, ha legalább $k+1$ pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle k-nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad. A legnagyobb olyan k számot, amelyre még a G gráf k-szorosan összefüggő, $\kappa(G)$-vel jelöljük.
Egy G gráfot *k-szorosan élösszefüggőnek* nevezünk, ha akárhogy hagyunk el belőle k-nál kevesebb élet, a maradék gráf összefüggő marad. A legnagyobb olyan k számot, amelyre még a G gráf k-szorosan élösszefüggő, $\lambda(G)$-vel jelöljük.

Menger tételei:
1. Ha G egy irányított gráf, $u, v \in V$, akkor az uv páronként élidegen irányított utak maximális száma megegyezik az összes uv irányított utat lefogó élek minimális számával.
2. Ha G egy irányított gráf, $u, v \in V$ két nem szomszédos csúcs, akkor az uv páronként pontidegen irányított utak maximális száma megegyezik az u-t és v-t elválasztó pontok minimális számával.
3. Ha G egy irányítatlan gráf, $u, v \in V$, akkor az uv páronként élidegen irányítatlan utak maximális száma megegyezik az összes uv utat lefogó élek minimális számával.
4. Ha G egy irányítatlan gráf, $u, v \in V$ két nem szomszédos csúcs, akkor az uv páronként pontidegen irányítatlan utak maximális száma megegyezik az u-t és v-t elválasztó pontok minimális számával.

Állítás: A G gráf akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha legalább $k+1$ pontja van, és bármely két pontja között létezik k pontidegen út.
Állítás: A G gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha bármely két pontja között létezik k élidegen út.

1. Hányszorosan összefüggő
   (a) egy fa;
   (b) egy kör;
   (c) egy teljes gráf?
2. Hányszorosan összefüggőek az alábbi gráfok?

3. Mutassuk meg, hogy egy háromszorosan összefüggő gráfban mindig létezik páros hosszúságú kör.
4. Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, amelyre a $K_{n,n}$ teljes páros gráf k-szorosan összefüggő.
5. Bizonyítsuk be, hogy a K_n gráf $(n-1)$-szeresen élösszefüggő, de n-szeresen nem.
6. A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-szeresen élösszefüggő legyen?
7. Tegyük fel, hogy a G gráfban a rögzített x és y pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az x és y pontokat összekötő utakat lefogó élek maximális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6 vagy 7?

8. Minden $k > 1$ egészre mutassunk olyan egyszerű gráfot, amely k-szorosan élösszefüggő, de csak egyszeresen összefüggő.

9. Egy munkahelyen 8 állásra jelentkeztek. Anna az 1., 2., 3., 4., 5., 6. állásra, Bandi a 2., 5., 8. állásra, Csilla a 2. és 5. állásra, Dóra és Ernő a 2., 8. állásra, Feri az 1., 2., 3., 4., 7. állásra jöhet szóba. Ha minden állásra egy ember kell, maximum hányat tudnak hatuk közül foglalkoztatni.

10. Mutassuk meg, hogy egy fának nem lehet két különböző teljes párosítása.

11. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható.

12. Egy kiránduláson a résztvevő n házaspár között akarunk szétosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a csokoládék közül, és hogy minden csokoládét minden házaspárnak legalább az egyik tagja szereti. Bizonyítsuk be, hogy a csokoládék kioszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amilyet szeret.

13. G egy páros gráf, A és B osztályokkal, és minden $X \subseteq A$ halmazra $N(X) \geq |X| - 1$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz olyan párosítást, ami A-t egy pont kivételével lefedi.