Párosítások;
Független és lefogó pont- illetve élhalmazok;
Színezés

8. gyakorlat

2011. október 25.

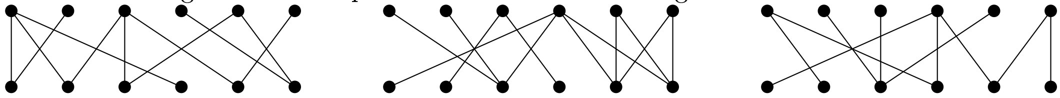
Frobenius-tétel: Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.
Hall-tétel: Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van A-t lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

$\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma
$\nu(G)$: független élek maximális száma
$\rho(G)$: lefogó élek minimális száma
$\alpha(G)$: független pontok maximális száma

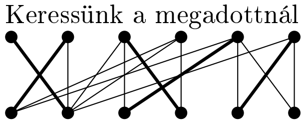
Állítás: $\nu(G) \leq \tau(G)$ minden G gráfra.
Állítás: $\alpha(G) \leq \rho(G)$ minden G gráfra.
Gallai-tétel: $\tau(G) + \alpha(G) = |V(G)|$ minden hurokélmentes G gráfra.
Gallai-tétel: $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$ minden G gráfra, amelyben nincs izolált pont.
Kőnig-tétel: Ha $G = (A, B, E)$ páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$. Ha nincs G-ben izolált pont, akkor $\alpha(G) = \rho(G)$ is teljesül.

Definíció: Egy G hurokélmentes gráf ***kromatikus száma*** $\chi(G) = k$, ha G k színnel kiszínezhető, de $k-1$ színnel nem.
Definíció: A G gráf egy teljes részgráfját ***klikknek*** nevezzük. A G-ben található maximális méretű klikk méretét $\omega(G)$-vel jelöljük és a gráf ***klikkszámának*** nevezzük.
Állítás: Minden G gráfra $\chi(G) \geq \omega(G)$.
Brooks-tétel: Ha G egyszerű, összefüggő gráf, nem teljes gráf és nem páratlan hosszú kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

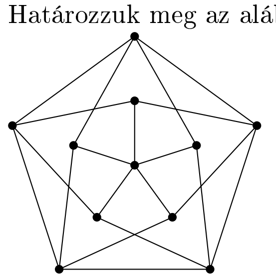
1. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris páros gráfban a teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványával egyenlő.
2. Ketten a következő játékot játsszák. Egy gráfban felváltva választanak pontokat úgy, hogy a pontok mindig utat alkossanak. Az veszít, aki nem tud újabb pontot választani. Ha a gráfban van teljes párosítás, akkor kinek van nyerő stratégiája?
3. Konstruáljunk olyan gráfot, amelynek pontosan k darab különböző teljes párosítása van.
4. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.



5. Keressünk a megadottnál nagyobb méretű párosítást az alábbi gráfban!

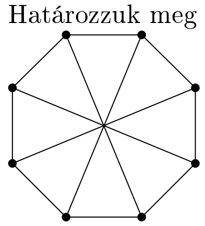


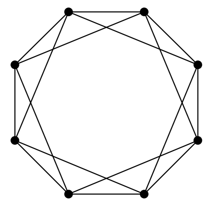
6. Határozzuk meg az alábbi gráfban a $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!



7. A G gráf csúcsai v_1, v_2, …, v_{40}. A v_i és v_j pontok akkor és csak akkor vannak éllel összekötve, ha $|i-j|=3$ vagy $|i-j|=5$. Határozzuk meg a $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!

8. Határozzuk meg az alábbi gráfok kromatikus számát!





9. Legyen $V(G)=\{1,2,3,\ldots,100\}$, és legyen $ij\in E(G)$, ha $|i-j|\le 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf kromatikus száma?

10. Lgyenek a G gráf csúcsai a sakktábla mezői. Két mező között akkor fusson él, ha a huszár (bástya, futó) egy lépésben az egyik mezőről a másikra léphet. Mennyi a G gráf kromatikus száma?

11. Legyenek $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ tetszőleges (véges) gráfok, és legyen $G=(V,E_1\cup E_2)$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G)\le\chi(G_1)\chi(G_2)$.

A Pósa- és a Chvátal-tétel rajongóinak:
Egy 30 csúcsú egyszerű gráf két csúcsának a foka 10, a többié 20. Bizonyítsuk be, hogy a gráf tartalmaz Hamilton-kört.